В-третьих, наиболее подходящей формулой комплексной диэлектрической проницаемости полярной жидкости является ее кибернетическая модель, поскольку она, принципиально не меняя схему формирования напряженности эффективного поля Лорентца, полностью исключает возможность проявления катастрофы Мосотти.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Эйзенберг Д., Кауцман В.* Структура и свойства воды. – Л.: Гидрометеоиздат, 1975.
2. *Юхневич Г.В.* Инфракрасная спектроскопия воды. – М.: Наука, 1973.
3. *Золотарев В.М., Морозов В.Н., Смирнова Е.В.* Оптические постоянные природных и технических сред: справочник. – Л.: Химия, 1984.
4. *Костюков Н.С., Баньшева В.В.* Поляризационные процессы в воде // Электричество. – 2001. – № 11. – С.66-69.
5. *Сканави Г.И.* Физика диэлектриков: область слабых полей. – М.; Л.: Техтеориздат, 1949.
6. *Хиппель А.Р.* Диэлектрики и волны. – М.: ИЛ, 1960.
7. *Потапов А.А.* Деформационная поляризация: поиск оптимальных моделей. – Новосибирск: Наука, 2004.
8. *Костюков Н.С., Еремин И.Е.* Кибернетическая модель процесса упругой электронной поляризации диэлектрика // Электричество. – 2004. – № 1. – С.50-54.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Д. Плутенко.

УДК 534.1

© 2007 г. **Л. Кохаупт,** д-р техн. наук
(Технический университет прикладных наук, Берлин)

КРАТКИЙ ОБЗОР РАЗВИТИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ НОРМ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ К ПРОБЛЕМАМ КОЛЕБАНИЙ

Сообщается о результатах серии работ по развитию дифференциального исчисления для норм матричных и векторных функций. Эти результаты могут быть применены к различным проблемам колебаний, в частности, при определении оптимальных верхних границ для описания асимптотического поведения исходных функций.

Введение

В этой статье дан краткий обзор метода дифференциального исчисления, разработанного автором для норм матричных и векторных функций.

Рассмотрены приложения метода в различных проблемах колебаний. Главное внимание уделено предпосылкам развития, объяснению сути метода и иллюстрации результатов исследования примерами. Для уточнения условий, формулировок и результатов, не приведенных в настоящей статье, сошлемся на список литературы.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 1 описывается точка отсчета в развитии дифференциального исчисления для норм – проблемы колебаний и амортизации. Здесь большую роль играет первая логарифмическая производная. В разделе 2 объясняется введение второй логарифмической производной и представлено выражение для ее определения. В разделах 3 и 4 обсуждаются обобщения логарифмических производных; производные норм основной матрицы и производные норм векторной функции соответственно.

1. Проблемы колебаний и их амортизации

Начнем с рассмотрения колебательного поведения модели тела с заданной массой и продолжим моделью системы тел, обладающих заданными массами. Исследуя обе модели, сформулируем ряд проблем, которые будут обсуждаться в следующих разделах.

1.1. Колебательное поведение модели тела с заданной массой.

На рис. 1 представлена модель тела с заданной массой.

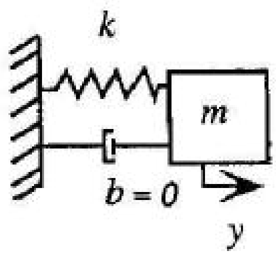

Рис. 1. Модель тела с заданной массой.

Закон управления для модели:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = 0,\ y(0) = y_0,\ \dot{y}(0) = \dot{y}_0. \tag{1}$$

Решение уравнения в фазе, близкой к пределу амортизации:

$$y(t) = Xe^{at}\sin(w_d t + f), \tag{2}$$

причем

$$a = -zw_n, V = D = \frac{b}{2\sqrt{km}}, w_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{3}$$

$$w_d = \sqrt{1-V^2}\,w_n \quad (V<1), \tag{4}$$

где амплитуда (X) и фаза (f) могут быть определены при начальных условиях $y(0) = y_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0$.

Графическая иллюстрация решения показана на рис. 2 [12].

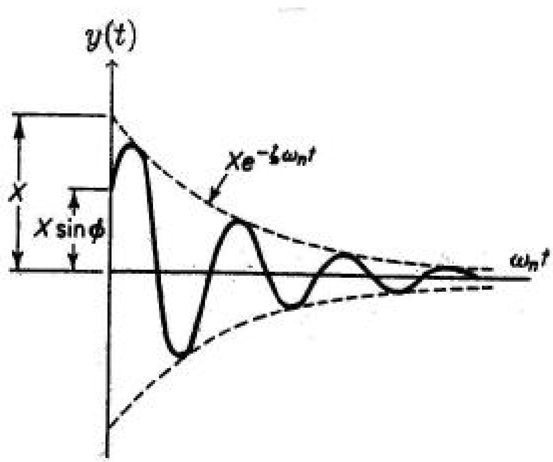

Рис. 2. Решение для модели тела с заданной массой.

Теперь рассмотрим затухание функции, или асимптотическое поведение решения. Так как $|\sin(w_d t + f)| \le 1$, то:

$$|y(t)| \le Xe^{at}, \tag{5}$$

где

$$a = -Vw_n < 0\,. \tag{6}$$

Отметим, что $a = \operatorname{Re} l = \operatorname{Re} \overline{l}$ – вещественная часть l или $\overline{l}$, где $(l, \overline{l})$ – пара сопряженных комплексных величин колебательной системы.

Далее заметим, что верхняя граница Xe^{at} в (5) является верхней огибающей границей функции $|y(t)|$. Позже увидим, что уравнения границ для моделей систем тел с заданными массами не так хороши для модели колебаний одного тела.

1.2. Колебательное поведение системы тел с заданными массами.

Рассмотрим модель системы тел с заданными массами (рис. 3).

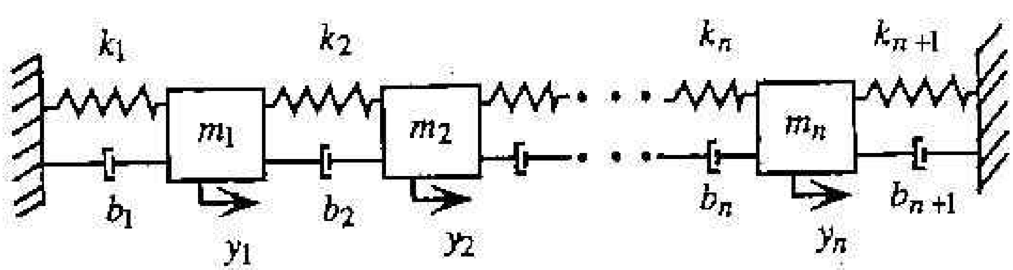

Рис. 3. Модель системы тел с заданными массами.

При $n = 1$, $(k_1 + k_2)/2 = k$, $(b_1 + b_2)/2 = b$, $m_1 = m$, $y_1 = y$ данная модель превращается в модель, представленную на рис. 1. Закон управления для модели, изображенной на рис. 3, выглядит так:

$$M\ddot{y} + B\dot{y} + Ky = 0, y(0) = y_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0, \tag{7}$$

где M, B, K и y – матрицы масс, амортизации, упругости и вектор перемещения соответственно:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & m_n \end{bmatrix}, \tag{8}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 + b_2 & -b_2 & & & & \\ -b_2 & b_2 + b_3 & -b_3 & & & \\ & -b_3 & b_3 + b_4 & -k_4 & & \\ & \dots & \dots & \dots & & \\ & & -b_{n-1} & b_{n-1} + b_n & -b_n \\ & & & -b_n & b_n + b_{n+1} \end{bmatrix}, \tag{9}$$

$$B = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & & & & \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & & & \\ & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 & & \\ & \dots & \dots & \dots & & \\ & & -k_{n-1} & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ & & & -k_n & k_n + k_{n+1} \end{bmatrix}, \tag{10}$$

и

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Чтобы получить формулу, аналогичную (5), колебательная система второго порядка (7) трансформируется в систему первого порядка, но двойной размерности – в так называемую форму состояния. Для выполнения этого преобразования положим, что:

$$z = \dot y, \quad x = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \tag{12}$$

и

$$A = \begin{bmatrix} 0 & E \\ -M^{-1}K & -M^{-1}B \end{bmatrix}, \tag{13}$$

где x – вектор состояния, A – матрица системы. Тогда (7) эквивалентен закону управления:

$$\dot x = Ax, x(0) = x_0. \tag{14}$$

Решение этой задачи имеет следующий вид:

$$x(t) = \Phi(\mathrm{t})\mathrm{x}_0, \tag{15}$$

с основной матрицей

$$\Phi(\mathrm{t}) = \mathrm{e}^{\mathrm{At}} = \sum_{j=0}^{\infty} A^j \frac{t^j}{j!}. \tag{16}$$

Отсюда вытекает, что:

$$\|x(t)\|_\infty = \|\Phi(t)x_0\|_\infty \le \|\Phi(t)\|_\infty \|x_0\|_\infty . \tag{17}$$

Значения $\|\Phi(t)\|_\infty$ проиллюстрированы на рис. 4.

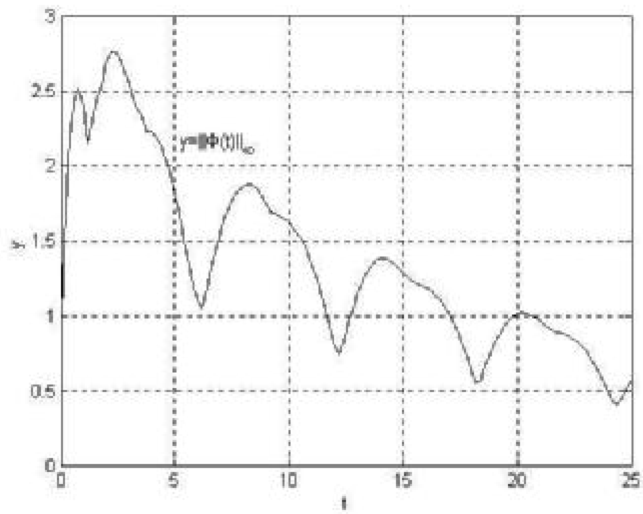

Рис. 4. Норма Чебышева основной матрицы.

Имеются три известные верхние границы, а именно:

$$\|\Phi(t)\|_\infty = \left\|e^{At}\right\|_\infty \le e^{\|A\|_\infty t}; \tag{18}$$

$$\|\Phi(t)\|_\infty \le e^{m[A]_\infty t}; \tag{19}$$

$$\|\Phi(t)\|_\infty \le M_{e,\infty} e^{(a+e)t}, \tag{20}$$

где соотношение

$$m_\infty[A] = D_+^1 \|\Phi(0)\|_\infty \tag{21}$$

называется логарифмической производной, а выражение

$$a = n[A] = \max_{j=1,\ldots,n} \mathrm{Re}\, l_j(A) \tag{22}$$

(с собственными значениями $l_j(A)$ матрицы A) именуется спектральной абсциссой матрицы A.

Заметим, что в третьей верхней границе $e > 0$ и может быть сколь угодно мало, и если можно привести матрицу A к диагональной, то e может быть приравнено нулю.

Сравним первые две верхние границы. Так как согласно [2, 11]:

$$m_\infty[A] = \max_{i=1,\dots,n}\left\{\operatorname{Re} A_{ii} + \sum_{j=1;\, j\neq i}^{n} \left|A_{ij}\right|\right\} \tag{23}$$

и

$$\left\|A\right\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n}\left\{\left|A_{ii}\right| + \sum_{j=1;\, j\neq i}^{n} \left|A_{ij}\right|\right\}, \tag{24}$$

то имеем

$$m_\infty[A] \le \left\|A\right\|_\infty, \tag{25}$$

означающее, что вторая верхняя граница лучше первой. Поскольку $m_\infty[A] = D_+^1\left\|\Phi(0)\right\|_\infty$, то вторая верхняя граница $y = e^{m[A]_\infty t}$ является подходящей лишь при малых $t \ge 0$.

Третья верхняя граница $y = M_{e,\infty}e^{(a+e)t}$ отражает тенденцию к убыванию $\left\|\Phi(t)\right\|_\infty$ и подобна поведению модели колебаний одного тела, но значение $M_{e,\infty}$, как правило, слишком большое. Эта верхняя граница описывает так называемое асимптотическое поведение, т.е. если $t \ge 0$ велико.

Замечание: формулы для $m_1[A]$ и $m_2[A]$ в нормах $\|.\|_1$ и $\|.\|_2$ (известных как спектральные нормы) можно найти в [2, 11].

1.3. Формулировка трех проблем

(i) Если $D_+^2\left\|\Phi(0)\right\|_\infty < 0$, тогда $y = \left\|\Phi(t)\right\|_\infty$ имеет правую кривизну в $t_0 = 0$. В этом случае касательная в $t_0 = 0$, т.е.

$$y = \left\|\Phi(0)\right\|_\infty + D_+^1\left\|\Phi(0)\right\|_\infty t = 1 + m_\infty[A]t, \tag{26}$$

является лучшей верхней границей, чем $y = e^{m[A]_\infty t}$ (рис. 4). Это приводит к проблеме П1:

(П1) Определение $D_+^2\left\|\Phi(0)\right\|_\infty$ и, в общем случае, $D_+^k\left\|\Phi(0)\right\|_\infty$.

Величина $m_\infty^{(2)}[A] = D_+^2\left\|\Phi(0)\right\|_\infty$ называется второй логарифмической производной. Проблема П1 обсуждается в разделе 2.

(ii) Функции $y = \left\|\Phi(t)\right\|_\infty$ и $y = M_{e,\infty}e^{(n[A]+e)t}$ представлены на рис. 5. Как правило, постоянная $M_{e,\infty}$ слишком велика; оптимальное значение $M_{e,\infty}$ может быть определено, если существует возможность определить производные $D_+\left\|\Phi(t)\right\|_\infty$. Это приводит к проблеме П2:

(П2) Определение $D_+^k\left\|\Phi(t)\right\|_\infty$ при всех $t \ge 0$.

Проблема П2 обсуждается в разделе 3.

(iii) Имеется:

$$\|x(t)\|_\infty \le \|\Phi(t)x_0\|_\infty \le \|\Phi(t)\|_\infty \|x_0\|_\infty \le M_{e,\infty} e^{(n[A]+e)t} \|x_0\|_\infty = \\ = X_{e,\infty} e^{(n[A]+e)t}, \qquad (27)$$

причем

$$X_{e,\infty} = M_{e,\infty} \|x_0\|_\infty . \qquad (28)$$

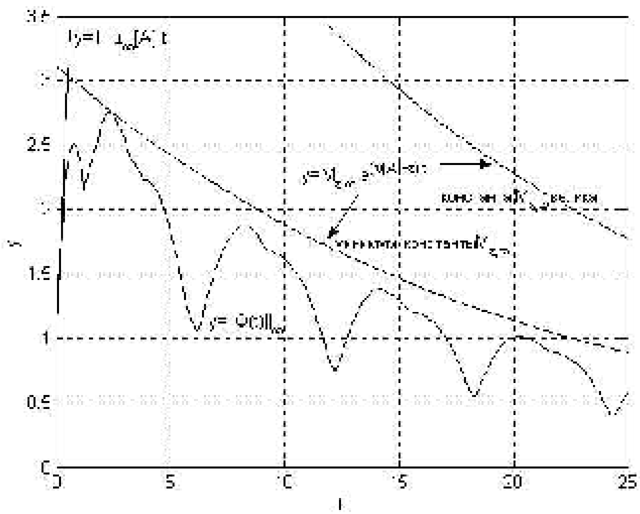

Рис. 5. $y = \|\Phi(t)\|_\infty$ и $y = M_{e,\infty} e^{(n[A]+e)t}$.

На рис. 6 можно увидеть кривые $y = \|x(t)\|_\infty$ и $y = X_{e,\infty} e^{(n[A]+e)t}$.

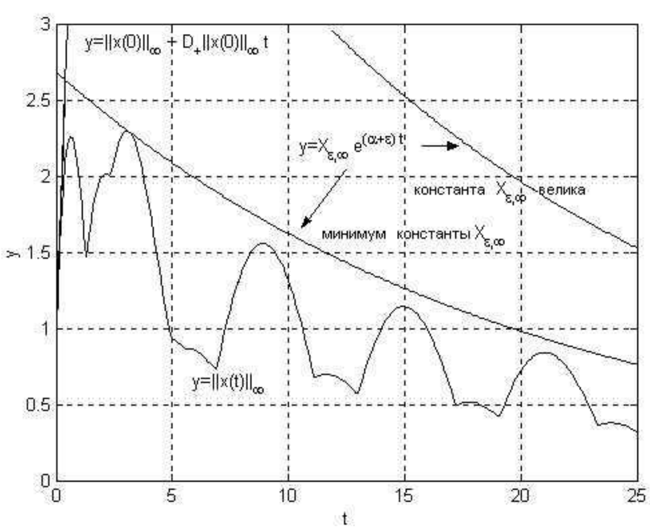

Рис. 6. $y = \|x(t)\|_\infty$ и $y = X_{e,\infty} e^{(n[A]+e)t}$.

Итак, подобно (ii), это приводит к проблеме П3:

$\boxed{\text{(П3) Определение } D_+^k \|\mathrm{x(t)}\|_\infty \text{ при всех } t \ge 0.}$

Проблема П3 обсуждается в разделе 4.

2. Вторая логарифмическая производная

В этом разделе объясняется способ определения второй логарифмической производной. Выберем норму Чебышева, поскольку выкладки с ее применением наиболее просты. Далее приведем пример использования результатов. Кроме того, объясним, почему случай спектральной нормы сложнее, чем использование нормы Чебышева.

2.1. Вывод формул для нормы Чебышева

Заметим, что мы выбираем норму Чебышева, потому что в этой норме проблема П1 может быть разрешена проще.

Необходимо разложить $\|\varPhi(t)\|_\infty$ локально в правой окрестности $t_0 = 0$:

$$\|\varPhi(t)\|_\infty = m_\infty^{(0)}[A] + m_\infty^{(0)}[A]t + m_\infty^{(1)}[A]\frac{t^2}{2} + \ldots, 0 \le t \le \Delta t_0 \text{ (мало)}. \tag{29}$$

Тогда,

$$\begin{aligned} &\|\varPhi(t)\|_\infty = m_\infty^{(0)}[A], \\ &D_+\|\varPhi(t)\|_\infty = m_\infty^{(1)}[A] = m_\infty[A], \\ &D_+^2\|\varPhi(t)\|_\infty = m_\infty^{(2)}[A]. \end{aligned} \tag{30}$$

Последовательность вывода формул следующая:

пусть $\varPhi(t) = (\varPhi_{ij}(t))$, тогда:

$$\|\varPhi(t)\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} f_i(t), \tag{31}$$

где $f_i(t) = \sum_{j=1}^{n} |\varPhi_{ij}(t)|$;

при комплексном числе a имеет место равенство

$$|a| = \sqrt{(\operatorname{Re} a)^2 + (\operatorname{Im} a)^2} = |\operatorname{Re} a|\sqrt{1 + \frac{(\operatorname{Im} a)^2}{(\operatorname{Re} a)^2}}, \tag{32}$$

где $\operatorname{Re} a \ne 0$;

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \ldots, \ |x| < 1. \tag{33}$$

Объясним процедуру числовым примером. При $m_j = 1, j = 1, \ldots, n$; $k_j = 1, j = 1, \ldots, n+1$, $b_j = 1/2$ (j четно), $b_j = 1/4$ (j нечетно) и n = 5 имеется $A \in \Re^{10\times 10}$, откуда следует представление

$$\|\varPhi(t)\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,10} \sum_{j=1}^{10} |\varPhi_{ij}(t)| = \max_{i=1,\ldots,10} f_i(t), \tag{34}$$

причем согласно [9]:

$$
\begin{array}{rcccccccl}
f_1(t) & = & \boxed{1} & + & 1\cdot t & -1.25\cdot t^2/2 & + & \mathbf{L} & \\
f_2(t) & = & \boxed{1} & + & 1\cdot t & +0\cdot t^2/2 & + & \mathbf{L} & \\
f_3(t) & = & \boxed{1} & + & 1\cdot t & +0\cdot t^2/2 & + & \mathbf{L} & \\
f_4(t) & = & \boxed{1} & + & 1\cdot t & +0\cdot t^2/2 & + & \mathbf{L} & \\
f_5(t) & = & \boxed{1} & + & 1\cdot t & -1.5\cdot t^2/2 & + & \mathbf{L} & \\
f_6(t) & = & \boxed{1} & + & 2.75\cdot t & -4.0625\cdot t^2/2 & + & \mathbf{L} & \\
f_7(t) & = & \boxed{1} & + & \boxed{4}\cdot t & -5.125\cdot t^2/2 & + & \mathbf{L} & \\
f_8(t) & = & \boxed{1} & + & \boxed{4}\cdot t & \boxed{-4.5}\cdot t^2/2 & + & \mathbf{L} & \\
f_9(t) & = & \boxed{1} & + & \boxed{4}\cdot t & -4.875\cdot t^2/2 & + & \mathbf{L} & \\
f_{10}(t) & = & \boxed{1} & + & 2.5\cdot t & -3.375\cdot t^2/2 & + & \mathbf{L} &
\end{array}
\tag{35}
$$

при $0 \le t \le t_1$, где t_1 – достаточно мало. Пусть $t_1 > 0$ столь мало, что в $f_i(t)$ постоянная – больше чем линейная часть, а линейная часть – больше чем квадратичная часть; это соблюдается, если взять, например, $t_1 = 10^{-3}$. Сравнивая только постоянные части, видим, что все $f_i(t), i = 1, \mathbf{L}, 10$ будут кандидатами для максимума. При сравнении линейных частей, кандидатами на максимум останутся только $f_7(t), f_8(t), f_9(t)$. Наконец, сравнивая квадратичные части $f_7(t), f_8(t), f_9(t)$, находим, что $f_8(t)$ должно быть максимумом, т.е.

$$\|\Phi(t)\|_\infty = f_8(t) = 1 + 4t - \frac{4.5t^2}{2} + \mathbf{L}, \; 0 \le t \le t_1, \tag{36}$$

так что

$$D_+^1 \|\Phi(0)\|_\infty = m_\infty^{(1)}[A] = 4 \tag{37}$$

и

$$D_+^2 \|\Phi(0)\|_\infty = m_\infty^{(2)}[A] = -4.5 < 0 . \tag{38}$$

Процедура разложения $\|\Phi(t)\|_\infty$ в ряд описана здесь на примере, а может быть сформулирована строго; подробности можно найти в [3].

Замечание 1: при sup-нормах $\|\cdot\|$ можно показать, что

$$m[A] = m^{(1)}[A] = D_+^1 \|\Phi(0)\| = \lim_{h \to 0^+} \frac{\ln \left\| e^{Ah} \right\|}{h} . \tag{39}$$

Это отношение могло быть предпосылкой для введения терминов логарифмической производной и логарифмической нормы.

Замечание 2: в литературе содержится определение

$$m[A] = \lim_{h \to 0+} \frac{\|E + Ah\| - 1}{h} , \tag{40}$$

при нормах $\|E\|=1$, где E – единичная матрица. Это, очевидно, эквивалентно:

$$m[A]== \lim_{h\to 0^+} \frac{\|e^{Ah}\|-\|E\|}{h} = D_+^1\|\varPhi(0)\|. \qquad (41)$$

2.2. Численный пример

Чтобы вычислить логарифмические производные, автор разработал программу в среде Matlab. Рис. 5 показывает кривую $y=\|\Phi(\mathrm{t})\|_\infty$ и ее верхнюю границу $y=1+m_\infty[A]t$ для данных в разделе2.1.

Замечание 3: оно касается вывода второй логарифмической производной в спектральной норме $\|\cdot\|_2$.

Имеем:

$$\|\varPhi(t)\|_2 = \sup_{u\neq 0}\frac{\|\varPhi(t)u\|_2}{\|u\|_2} = \sqrt{\max_{j=1,\mathbf{L},n} l_j[\varPhi^*(t)\varPhi(t)]}, \qquad (42)$$

где l_j обозначает собственные значения и $\Phi^*(\mathrm{t})=\bar{\Phi}^{\mathrm{T}}(t)$. Поэтому следует разложить собственные значения $l_j[\varPhi^*(t)\varPhi(t)]$ в ряд в окрестности $t_0=0$. Это сложная проблема разрешена в [4].

3. Производные норм фундаментальной матрицы

В этом разделе обсуждается процедура вывода формул для $D_+^k\|\Phi(\mathrm{t})\|_\infty$ и результаты показываются на численном примере.

3.1. Процедура вывода формул

Чтобы определить величину $D_+^k\|\Phi(\mathrm{t}_0)\|_\infty$ при $t_0\ge 0$, как и при $t_0=0$, разложим в ряд величину $\|\Phi(\mathrm{t})\|_\infty$ в окрестности t_0, т.е.:

$$\|\Phi(\mathrm{t})\|_\infty = \|\Phi(\mathrm{t}_0)\|_\infty + D_+\|\Phi(\mathrm{t}_0)\|_\infty(t-t_0) + D_+^2\|\Phi(\mathrm{t}_0)\|_\infty\frac{(t-t_0)^2}{2} + \mathbf{L}, \qquad (43)$$

$t_0\le t\le t_0+\Delta t_0$ ($\Delta t_0>0$ мало). В [4] показано, что $\|\Phi(\mathrm{t})\|_\infty$ представляет собой аналитическое выражение в малой правой окрестности t_0, так что разложение возможно.

3.2. Численный пример

Мы хотим определить $M_{e,\infty}$ такое, чтобы верхняя граница $y=f(t)=M_{e,\infty}e^{(a+e)t}$ касалась кривой $y=\|\Phi(\mathrm{t})\|_\infty$.

Условия для определения искомого места касания t_c и постоянной $M_{e,\infty}$:

$$\begin{aligned} &\|\Phi(\mathrm{t_c})\|_\infty = f(\mathrm{t_c}), \\ &D_+\|\Phi(\mathrm{t_c})\|_\infty = f'(\mathrm{t_c}). \end{aligned} \tag{44}$$

Эти два уравнения для двух искомых значений t_c и $M_{e,\infty}$ разрешены численно. Применяя положения подраздела 2.1 для a, получим

$$a \doteq -0{,}0502 \tag{45}$$

и для искомых:

$$\begin{aligned} t_{c,\infty} &\doteq 2.3930, \\ M_{e,\infty} &\doteq 3.1148. \end{aligned} \tag{46}$$

На рис. 5 кривые $y = \|\Phi(\mathrm{t})\|_\infty$ и $y = M_{e,\infty}e^{(n[A]+e)t}$ с минимальным $M_{e,\infty}$ проиллюстрированы графиками.

4. Производные норм векторных функций

В этом разделе обобщается идея раздела производных норм, результаты поясняются на численном примере.

4.1. Процедура вывода формул

Пусть $x(t)$ – аналитическая векторная функция, являющаяся, например, решением исходной задачи $\dot{x} = Ax, x(t_0) = x_0$. Чтобы определить величины $D_+^k\|x(t_0)\|_p$, $p \in [1,\infty]$, как в подразделе 3.1, мы применим разложение в ряд $\|x(t)\|_p$ в окрестности $t_0 \geq 0$:

$$\|x(t)\|_p = \|x(t_0)\|_p + D_+\|x(t_0)\|_p(t - t_0) + D_+^2\|x(t_0)\|_p\frac{(t - t_0)}{2} + \mathbf{L}, \tag{47}$$

$t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t_0$ ($\Delta t_0 > 0$ мало) при $p \in [1,\infty]$.

В [5] показано, что $\|x(t)\|_p$ является аналитическим выражением в малой правой окрестности $t_0 \geq 0$, так что это разложение возможно.

4.2. Численный пример

Проблема состоит в определении такого $X_{e,\infty}$, что верхняя граница $y = f(t) = X_{e,\infty}e^{(a+e)t}$ касается кривой $y = \|x(t)\|_\infty$. Решение этой проблемы аналогично решению подраздела 3.2.

Для решения начальной задачи $\dot{x} = Ax, x(t_0) = x_0$ относительно $x(t)$ кривые $y = \|x(t)\|_\infty$ и $y = X_{e,\infty}e^{(a+e)t}$ с минимальным $X_{e,\infty}$ показаны на рис. 6. Примеры при $p = 2$ и с возбуждением силы можно найти в [5].

Заключение

Результаты проведенного обзора развития дифференциального исчисления для матричных норм и векторных функций могут быть использованы при решении проблем теории колебаний. Применение новых теоретических положений показано при вычислении минимальных значений постоянных в формулах верхних границ, описывающих асимптотическое поведение функции. Из-за ограничений формата статьи представлены только главные идеи. Дополнительную информацию можно получить из литературных источников.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Desoer Ch. A., Haneda H.* The measure of a matrix as a tool to analyze computer algorithms for circuit analysis // IEEE Trans. Circuit Theory. – 1972. – Vol. 19. – P. 480-486.
2. *Dahlquist G.* Stability and error bounds in the numerical integration of ordinary differential equations // Kungl. Tekn. Hцgsk. Handl., Stockholm – 1959. – Vol. 130.
3. *Kohaupt L.* Second Logarithmic Derivative of a Complex Matrix in the Chebyshev Norm // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 1999. – Vol. 21, N 2. – P. 382-389.
4. *Kohaupt L.* Differential calculus for some p-norms of the fundamental matrix // J. Comp. Appl. Math. – 2001. – Vol. 135. – P.1-21.
5. *Kohaupt L.* Differential calculus for p-norms of complex-valued vector functions with applications // J. Comp. Appl. Math. – 2002. – Vol. 145. – P. 425-457.
6. *Kohaupt L.* Extension and further development of the differential calculus for matrix norms with applications // J. Comp. Appl. Math. – 2003. – Vol. 156. – P. 433-456.
7. *Kohaupt L.* Differential calculus for the matrix norms $|.|_1$ and $|.|_\infty$ with applications to asymptotic bounds for periodic linear systems // Int. J. Comput. Math. – 2003 – Vol. 81. – P. 81-101.
8. *Kohaupt L.* New upper bounds for free linear and nonlinear vibration systems with applications of the differential calculus of norms // Appl. Math. Modelling – 2004. – Vol. 2. – P. 367-388.
9. *Kohaupt L.* Illustration of the logarithmic derivatives by examples suitable for classroom teaching // Rocky Mount. J. Math. – 2005. – Vol. 35, N. 5. – P. 1595-1625.
10. *Kohaupt L.* Computation of optimal two-sided bounds for the asymptotic behavior of free linear dynamical systems with application of the differential calculus of norms // J. Comp. Math. Optimization – 2006. – Vol. 2, N. 3. – P. 127-173.
11. *Лозинский С.М.* Оценка погрешности численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений I. // Известия высших учебных заведений – 1958. – № 5. – С. 52-90.
12. *Thomson W.T.* Theory of Vibration with Applications. – Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1981.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Л. Ереминым.