Надежность и техническая диагностика
2007. №1(13)

УДК 681.5.63-192

© 2007 г. **О.В. Абрамов**, д-р техн. наук
(Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток)

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВЫБОРЕ ДОПУСКОВ НА ПАРАМЕТРЫ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ[1]

Рассматривается задача определения оптимальных допусков на параметры элементов систем автоматического управления, исходя из заданных требований надежности и технологичности. Найдены необходимые условия оптимума интервалов допустимых изменений параметров.

Введение

Задача назначения допусков на параметры технических систем сводится, в конечном итоге, к замене области допустимых изменений параметров некоторым ортогональным гиперпараллелепипедом, оптимальным в том или ином смысле [1]. Исходя из требований технологичности, допуски на отдельные параметры должны быть по возможности большими, требование же обеспечения надежности (или точности) системы приводит к необходимости уменьшения допусков на параметры элементов.

В работе найдены необходимые условия оптимума интервалов допустимых изменений для двух различных достаточно естественных критериев.

Постановка задачи

Пусть $B \subset R^n$ – множество допустимых значений параметров x некоторой технической системы. Для простоты будем считать его замкнутым, ограниченным и строго выпуклым. Нужно найти такие интервалы изменения параметров $y_k \le x_k \le z_k$, $k=1,2,\ldots n$, чтобы достигался минимум выражения

$$A = c_0 P_{\text{отк}} + \sum_{k=1}^{n} c_k /(z_k - y_k), \qquad (1)$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 05-08-01398 и гранта ДВО РАН 06-I-ЭММПУ-054 по программе № 16 Отделения ЭММПУ РАН.

где при заданной плотности распределения параметров $r(x)$

$$P_{\text{отк}} = \int\limits_{k^n \setminus B} r(x)dv, \quad (dv = dx_1 \ldots dx_n),$$

k^n – параллелепипед, $y_k \le x_k \le z_k$, k=1, 2, …, n.

Критерий вида (1) позволяет выбрать наилучшую аппроксимацию области B параллелепипедом k^n с учетом требований надежности (составляющая $c_0 P_{\text{отк}}$) и технологичности. При этом величины $c_0, c_1, \ldots, c_n$ выполняют в (1) роль весовых коэффициентов и, следовательно, позволяют учитывать относительную важность тех или иных требований.

Решение задачи назначения допусков

Пусть B_{x_n} – проекция множества B на ортогональное к x_n подпространство R^{n-1}. Параллельным переносом координат можно добиться, чтобы $0 \in B_{x_n}$ в R^{n-1}. Если $\alpha \ne 0$ – вектор из R^{n-1}, то луч t_a $(0 < t < \infty)$ пересекает границу множества B_{x_n} в единственной точке a^*. В силу строгой выпуклости и замкнутости множества B существует единственное значение $x_n(a)$ такое, что вектор $\{a, x_n(a)\} \in B$. Введем в рассмотрение функции

$$\overline{f}(a) = \begin{cases} \max x_n, & a \in B_{x_n}, \\ \{a, x_n\} \in B, & \\ x_n(a), & a \notin B_{x_n}, \end{cases}$$

$$\underline{f}(a) = \begin{cases} \min x_n, & a \in B_{x_n}, \\ \{a, x_n\} \in B, & \\ x_n(a), & a \notin B_{x_n}. \end{cases}$$

Они обладают следующими свойствами:

а) $\overline{f}(a)$ и $\underline{f}(a)$ – непрерывны;

б) множества B и $\{(\alpha, x_n): \underline{f}(\alpha) \le x_n \le \overline{f}(\alpha)\}$ совпадают с точностью до множества меры нуль.

Покажем непрерывность функций $\overline{f}(a)$ и $\underline{f}(a)$ в точках, не принадлежащих множеству B_{x_n}.

Пусть все $\{\alpha_к\}$ – некоторая последовательность в R^{n-1}, $\alpha_к \xrightarrow[k \to \infty]{} \alpha_0$ и $\alpha_0 \notin B_{x_n}$. Поскольку множество B_{x_n} замкнуто, то можно считать, что все $a_k \notin B_{x_n}$. Рассмотрим последовательность $\{\alpha_k^*, f(\alpha^*)\} = \{\alpha_k^*, x_n(\alpha_k)\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, она ограничена (имеется в виду покоординатная ограниченность). Так как при любом $к$ последовательность $\{\alpha_k^*,\ x_n(\alpha_k)\}$ принадлежит замкнутому множеству B, то все ее предельные точки также принадлежат B. Предельные точки имеют вид $\{\alpha_0^*,\ x_n^0\}$, но x_n^0 определено единственным образом величиной $x_n(a_0)$. Значит, последовательность $\{\alpha_k^*,\ x_n(\alpha_k)\}$, а следовательно, и $\{\alpha_k,\ x_n(\alpha)\} = \{\alpha_k,\ \underline{f}(\alpha_k)\} = \{\alpha_k,\ \overline{f}(\alpha_k)\}$ имеет единственную предельную точку; отсюда – непрерывность функций $\overline{f}(a)$ и $\underline{f}(a)$ во всех точках, лежащих вне множества B_{x_n}.

Непрерывность функций $\overline{f}(a)$ и $\underline{f}(a)$ в точках множества B_{x_n} также элементарно следует из замкнутости границы множества B и его строгой выпуклости.

Второе свойство очевидно.

Для фиксированных чисел $y_n < z_n$ введем новые непрерывные функции

$$\overline{F}(\alpha) = \min\{\overline{f}(\alpha),\ z_n\},$$

$$\underline{F}(\alpha) = \max\{\underline{f}(\alpha),\ y_n\}.$$

Вероятность отказа можно теперь записать в следующем виде

$$P_{\text{отк}} = \int\limits_{y_1}^{z_1} dx_1 \ldots \int\limits_{y_n}^{z_n} \rho(x)dx_n - \int\limits_{y_1}^{z_1} dx_1 \ldots \int\limits_{y_{n-1}}^{z_{n-1}} dx_n \int\limits_{\underline{F}(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{\overline{F}(x_1,\ldots,x_{n-1})} \rho(x)dx_n .$$

Если плотность распределения $r(x)$ непрерывна, то функция $P_{\text{отк}}$ непрерывно дифференцируема. Частные производные этой функции по переменной z_i вычисляются по формуле

$$\frac{\partial P_{\text{отк}}}{\partial z_i} = \int\limits_{y_1}^{z_1} dx_1 \ldots \int\limits_{y_{i-1}}^{z_{i-1}} dx_{i-1} \int\limits_{y_{i+1}}^{z_{i+1}} dx_{i+1} \ldots \int\limits_{y_n}^{z_n} r(x_1,\ldots,x_{i-1},\ z_i, x_{i+1},\ldots\ x_n)dx_n -$$

$$- \int\limits_{y_1}^{z_1} dx_1 \ldots \int\limits_{y_{i-1}}^{z_{i-1}} dx_{i-1} \int\limits_{y_{i+1}}^{z_{i+1}} dx_{i+1} \ldots \int\limits_{\underline{F}(x_1,\ldots,x_{i-1},z_i,x_{i+1},\ldots,x_{n-1})}^{\overline{F}(x_1,\ldots,x_{i-1},z_i,x_{i+1},\ldots,x_{n-1})} r(x_1,\ldots,x_{i-1}, z_i, x_{i+1},\ldots,x_{n-1})dx_n =$$

$$= \int\limits_{B\setminus k_{z_i}} r(x)dv_i .$$

Здесь k_{z_i} – грань параллелепипеда, перпендикулярная координатной оси x_i и проходящая через точки с i-й координатой, равной z_i, а $dv_i = dx_1 \ldots dx_{i-1}dx_{i+1} \ldots dx_n$.

Аналогично получается, что

$$\frac{\partial P_{\text{отк}}}{\partial y_i} = -\int\limits_{B\setminus k_{y_i}} r(x)dv_i .$$

Для краткости введем обозначение

$$\varphi_k = \int\limits_{B \setminus k_{y_k}} \rho(x) dv_k ,$$

$$\psi_k = \int\limits_{B \setminus k_{z_k}} \rho(x) dv_k ,$$

$$a_k = z_k - y_k .$$

При сделанных выше предположениях справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. В точке минимума функционала (1) должны выполняться равенства

$$c_0\varphi_k = c_0\psi_k = \frac{c_k}{a_k^2}, \ (k = 1,2,\ldots,n). \qquad (2)$$

Доказательство. Необходимым условием минимума являются равенства

$$\frac{\partial A}{\partial y_k} = c_0 \frac{\partial P_{\text{отк}}}{\partial y_k} + \frac{\partial}{\partial y_k} \sum_i \frac{c_i}{z_i - y_i} = -c_0 \varphi_k + \frac{c_k}{(z_k - y_k)^2} = 0,$$

$$\frac{\partial A}{\partial z_k} = c_0 \frac{\partial P_{\text{отк}}}{\partial z_k} + \frac{\partial}{\partial z_k} \sum_i \frac{c_i}{z_i - y_i} = -c_0 \Psi_k + \frac{c_k}{(z_k - y_k)^2} = 0,$$

но они эквивалентны равенствам (2).

Замечание. Для поиска минимума функционала (1) можно использовать любой из известных методов, – например, градиентный. Градиент вычисляется по формуле

$$grad\, A = \left\{ -c_0 \varphi_k + \frac{c_k}{(z_k - y_k)^2};\ c_0 \psi_k - \frac{c_k}{(z_k - y_k)^2} \right\}_{k=1}^{n}.$$

Видоизменим задачу. Зафиксируем некоторое число $x\,(0 < x < 1)$ и потребуем, чтобы достигался минимум выражения

$$D = \sum_i \frac{c_i}{(z_i - y_i)}$$

при условии

$$P_{\text{отк}} \le x .$$

Нетрудно видеть, что минимум D достигается, если $P_{\text{отк}} = x$, а поэтому можно рассматривать ограничение типа равенства. Необходимое условие минимума сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2. В точке минимума функции D должна выполняться цепочка равенств:

$$\frac{\varphi_1 c_1}{a_1^2} = \frac{\psi_1 c_1}{a_1^2}; \quad \frac{\varphi_2 c_2}{a_2^2} = \frac{\psi_2 c_2}{a_2^2}; \quad \ldots \frac{\varphi_n c_n}{a_n^2} = \frac{\psi_n c_n}{a_n^2}. \qquad (3)$$

Доказательство. Необходимым условием минимума является равенство

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial D}{\partial z_k}dz_k+\frac{\partial D}{\partial y_k}dy_k\right)=0$$

при условии

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\partial P_{\text{отк}}}{\partial z_k}dz_k+\frac{\partial P_{\text{отк}}}{\partial y_k}dy_k\right)=0\,.$$

Вычисляя производные, получаем

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{a_k^2}(dy_k-dz_k)=0,$$

$$\sum_{k=1}^{n}(y_k dz_k - j_k dy_k)=0\,.$$

Равенства (3) следуют из независимости дифференциалов dy_k и dz_k, ($k=1,2,\ldots,n$).

Для вычисления интервалов допустимых изменений параметров, соответствующих условиям (3), можно применить метод множителей Лагранжа или любой другой метод поиска условного экстремума.

Заключение

Нетрудно заметить, что соотношения (2) и (3) можно рассматривать как многомерный аналог принципа «равных плотностей» [2]. При заданной области допустимых значений параметров B и известной плотности распределения их вероятностей $r(x)$ эти соотношения позволяют определять положение гиперпараллелепипеда допусков, обеспечивающее:

либо минимальную вероятность отказа при заданных допусках на отдельные параметры;

либо максимальные допуски при заданной вероятности отказа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамов О.В.. Здор В.В., Супоня А.А.* Допуски и номиналы систем управления. – М.: Наука, 1976.
2. *Абрамов О.В.* Параметрический синтез стохастических систем с учетом требований надежности. – М.: Наука, 1992.