Надежность и техническая диагностика
2007. №1(13)

УДК 681.5.015.63-192

© 2007 г. **Г.Б. Диго,**
Н.Б. Диго
(Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток)

НАХОЖДЕНИЕ ОЦЕНКИ НЕИЗВЕСТНОЙ КОНСТАНТЫ ЛИПШИЦА ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ АЛГОРИТМИЧЕСКИ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ[1]

Анализируется возможность использования метода глобальной оптимизации на основе неравномерных покрытий для алгоритмически заданной целевой функции. Рассматривается одна из возникающих при этом проблем – оценка неизвестной константы Липшица. Обсуждаются варианты ее нахождения.

Введение

Проблемы поиска глобального экстремума возникают в различных областях науки и техники. Это могут быть задачи проектирования, управления, моделирования реальных процессов или явлений, анализа данных. Подходы глобальной оптимизации существенно отличаются от техники стандартных методов поиска локальных оптимальных значений функции. И если подходы к решению задач одномерной оптимизации исследованы достаточно глубоко, то вопросы построения эффективных алгоритмов многомерной оптимизации, имеющие важное практическое значение, продолжают привлекать внимание исследователей. Специфика задачи многомерной глобальной оптимизации состоит в многоэкстремальности целевой функции и неразрешимости в общем случае. Трудности численного решения подобных задач связаны как с их размерностью, так и с отсутствием достаточной априорной информации о целевой функции. Так, может быть недоступна дополнительная информация о функции (например, ее градиент). Возможна ситуация, когда в ходе решения задачи оказываются доступными лишь значения целевой функции, заданной в алгоритмической форме, получение которых (вычисление значений целевой функции в некоторой точке допустимой области) требует значительных вычислительных ресурсов.

[1] Работа выполнена при поддержке гранта ДВО РАН 06-П15-054 по программе №16 ОЭММПУ РАН и гранта РФФИ 05-08-01398.

Использование алгоритмов глобального поиска, отличных от переборных, требует каких-либо априорных предположений о свойствах рассматриваемой целевой функции, – например, ее липшицевости или дифференцируемости. Для многих практических задач выполнение условий Липшица бывает очевидным, но при этом значение ограничивающей константы (константы Липшица), как правило, неизвестно.

В настоящее время при поиске глобальных решений используются такие возможности вычислительной техники как оперативная память ЭВМ, параллельные и распределенные вычисления. В связи с переходом на высокопроизводительные ЭВМ стали применять методы глобальной оптимизации, допускающие использование методов локальной оптимизации для ускорения расчетов. Представляет интерес направление, основанное на идее неравномерных покрытий допустимого множества [1,2], в частности – методы половинных делений и безызбыточной диагональной стратегии разбиения [3].

Исследуется возможность их использования для нахождения глобального экстремума алгоритмически заданной многомерной функции, удовлетворяющей условию Липшица в области его поиска при различных вариантах нахождения оценок неизвестной константы Липшица.

Постановка задачи

Пусть на n-мерном гиперпараллелепипеде $P \subset R^n$ алгоритмически задана многоэкстремальная функция $\varphi(\mathbf{x})$, удовлетворяющая в области поиска условию Липшица с неизвестной константой L. Задача минимизации

$$\varphi_* = \min_{\mathbf{x} \in P} \varphi(\mathbf{x}), \quad P = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{a} \le \mathbf{x} \le \mathbf{b}\}, \tag{1}$$

где векторное неравенство $\mathbf{x} \le \mathbf{z}$ означает, что $x^i \le z^i, 1 \le i \le n$ не имеет аналитического решения.

Предположим, что существует оценка минимума целевой функции в области поиска, обозначим $\mathbf{X}_*$ – множество решений задачи (1) и введем в рассмотрение множество ее ε-оптимальных (приближенных) решений:

$$X_*^{\varepsilon} = \{\mathbf{x} \in P : f(\mathbf{x}) \le f_* + \varepsilon\}. \tag{2}$$

Очевидно, что $\mathbf{X}_* \subset \mathbf{X}_*^{\varepsilon} \subset P$. Тогда решение задачи (1) с заданной точностью ε подразумевает определение величины глобального минимума функции $\varphi(\mathbf{x})$ и нахождение хотя бы одной точки $\mathbf{x}_r$, где это приближенное значение достигается.

Липшицевость функции $\varphi(\mathbf{x})$ позволяет для отыскания ее глобального экстремума использовать методы, основанные на неравномерном покрытии допустимого множества, – например, метод половинного деления

[1] или методы, базирующиеся на адаптивных диагональных кривых [3]. Но их применение требует знания хотя бы оценки константы L. Ставится задача выбора алгоритма ее нахождения для многомерной алгоритмически заданной функции.

Анализ задачи

Методы, основанные на неравномерном покрытии допустимого множества, разбивают пространство поиска на набор многомерных подобластей, на которых нижняя граница целевой функции должна вычисляться с учетом значения константы Липшица или ее оценки либо на основе интервального анализа. Применение техники интервального анализа возможно, если целевая функция задана аналитически, дважды непрерывно дифференцируема и, кроме того, ее первая и вторая производные должны иметь конечное число нулей. В ситуации, когда функция цели задана алгоритмически и в ходе решения задачи доступны лишь ее значения, возникает необходимость оценки неизвестной константы Липшица, поскольку в таких условиях интервальный анализ неприменим [4].

Поиск оценки неизвестной константы Липшица сам по себе является достаточно сложной глобальной оптимизационной задачей [5], и подходы, на которых он основывается, зависят как от имеющейся априорной информации о целевой функции, так и от сложности алгоритма, по которому эта целевая функция вычисляется.

Так, если относительно свойств $\varphi(\mathbf{x})$ неизвестно ничего, кроме того, что она удовлетворяет условиям Липшица, можно искать оценку L, начиная с некоторого значения $C = C_0$ и уточняя его последовательным переходом к величинам $2C_0, 4C_0$ и т.д. Процесс поиска прекращается, когда отличие полученного результата от предыдущего достигнет заданной точности. Следует отметить, однако, что так найденная оценка обеспечивает лишь необходимое, но недостаточное условие того, чтобы найденное значение было не меньше истинного значения L [2].

Среди предлагаемых алгоритмов оценки неизвестной константы Липшица с целью использования ее в методах неравномерных покрытий интерес представляют такие варианты как адаптивное оценивание при работе алгоритма, выбор константы Липшица из множества возможных значений [3, 5 – 7]. В них могут применяться глобальная оценка с константой L, определяемая для всей допустимой области, локальные оценки констант L_i, вычисляемые для подобластей D_i Í D, попеременный переход к локальной и глобальной информации при адаптивном оценивании локальных констант Липшица в различных подобластях текущего разбиения области поиска.

Следует отметить, что при достаточно малых подобластях на работу алгоритмов в них основное влияние оказывает локальная информация о поведении целевой функции, а ее поведение в других подобластях имеет меньшее значение. В больших подобластях, наоборот, повышается роль глобальной информации из-за возможной ненадежности в этом случае локальной информации. Балансирование между локальной и глобальной информацией обеспечивает нахождение глобального минимума и ускорение работы алгоритма поиска [6].

Оценивание глобальной константы Липшица

Оценка минимума целевой функции $\varphi(\mathbf{x})$ в области поиска D, используемая в методе половинного деления и в методах, базирующихся на адаптивных диагональных кривых [1,3], зависит от коэффициента K, задаваемого формулой

$$K = K(k) = (r + C / k)\max(\lambda(k), \xi), \tag{3}$$

где $r > 1$, $C > 0$ – коэффициенты надежности алгоритма; $\xi > 0$ – некоторая малая константа; $\lambda(k)$ – текущая оценка константы Липшица на k-й, k ³ 1, итерации алгоритма. В (3) параметры r, C и ξ управляют оценкой K и оказывают значительное влияние на скорость сходимости алгоритма. Увеличение значений r и C повышает надежность метода. С их уменьшением увеличивается скорость поиска. Одновременно с этим возрастает вероятность сходимости метода к точке, которая не является точкой глобального минимума для функции $\varphi(\mathbf{x})$. Параметр ξ, являясь малой положительной величиной, обеспечивает корректную работу алгоритма в случае, когда функция $\varphi(\mathbf{x})$ сохраняет постоянное значение во всех точках испытаний целевой функции [3].

После выполнения k ³ 1 итераций алгоритма на $(k+1)$-й итерации уточнение константы Липшица происходит по формуле

$$l\,(k+1) = \max\{l\,(k), \max_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in P_i,\, \mathbf{x}\neq\mathbf{y}} (\left|j\,(\mathbf{x}) - j\,(\mathbf{y})\right| / \left\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\right\|)\}.$$

На первом шаге алгоритма начальная оценка константы L равна $l\,(1) = \left|j\,(\mathbf{a}) - j\,(\mathbf{b})\right| / \left\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\right\|$.

Параметры r, C и ξ из (3) подбираются (задаются) с учетом имеющейся априорной информации о характере целевой функции.

Следует отметить, что полученные оценки константы L могут быть сильно завышенными не только в случае дефицита информации о целевой функции, но и когда априори известно ее точное значение на исходном параллелепипеде P Ì R^n.

На произвольных P_i Ì P значения этих констант могут не достигаться, тогда при оценке минимума целевой функции будут использоваться сильно завышенные значения L. Поэтому даже в случае известного точного значения константы Липшица может возникать необходимость использования ее оценок.

Переход к локальным оценкам констант Липшица позволяет более точно оценить характер поведения $\varphi(\mathbf{x})$ на каждом из $P_i \subset P$ и избежать их сильного завышения.

Оценка локальной константы Липшица

Оценка локальной константы Липшица осуществляется в каждой из многомерных подобластей, на которые разбивается пространство поиска D. Для этого выбраны два алгоритма [5]. В первом из них для каждой $D_i \subset D$ оценка K_i локальной константы L_i вычисляется по формуле

$$K_i = K_i(k) = (r + C/k)\max\{\lambda_i, \gamma_i, \xi\}, \tag{4}$$

где $r > 1$, $C > 0$ – коэффициенты надежности алгоритма,

$$\lambda_i = |\varphi(\mathbf{a}_i) - \varphi(\mathbf{b}_i)| / \|\mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i\|, \tag{5}$$

$$\gamma_i = \|\mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i\| / d^{\max},$$

$$\mu = \max_{1 \le i \le m} (|\varphi(\mathbf{a}_i) - \varphi(\mathbf{b}_i)| / \|\mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i\|), \tag{6}$$

$$d^{\max} = \max_{1 \le i \le m} \|\mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i\|.$$

Величина $\xi > 0$ из (4) – некоторая малая константа, аналогичная той, что используется в (3).

Во втором алгоритме оценка K_i вычисляется по формуле

$$K_i = K_i(k) = \max\{(r + C/k)(\gamma\mu + (1-\gamma)\lambda_i^2/\mu), \xi\}, \tag{7}$$

где $0 \le \gamma \le 1$, λ_i и μ определяются по (5) и (6) соответственно.

В отличие от алгоритма, представленного (4), в (7) комбинируется глобальная и локальная информация, полученная ранее. Параметр γ обеспечивает баланс между глобальной информацией (параметр μ) и локальной информацией (величина λ_i^2/μ). В обоих выражениях локальная информация о целевой функции используется не только вблизи локального минимума, но и во всей области поиска.

Заключение

При глобальной оптимизации многомерной алгоритмически заданной целевой функции на основе методов неравномерных покрытий одной из важных проблем является оценка неизвестной или априори заданной константы Липшица. Это, в свою очередь, самостоятельная, достаточно сложная оптимизационная задача. Подходы к ее решению зависят как от имеющейся априорной информации о целевой функции, так и от сложности алгоритма вычисления ее значений.

Поскольку оценка глобальной константы Липшица по всей области поиска может не достигаться на каких-то из подобластей, составляющих ее неравномерное покрытие, целесообразно обращаться к локальным константам Липшица, находя их оценки.

Попеременный переход к локальной и глобальной информации при адаптивном оценивании локальных констант Липшица в различных подобластях текущего разбиения области поиска позволяет ускорить процесс сходимости алгоритмов и обеспечить нахождение глобального минимума.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Евтушенко Ю.Г., Ратькин В.А.* Метод половинных делений для глобальной оптимизации функций многих переменных // Известия Академии наук СССР. Техническая кибернетика. – 1987. – №1. – С.119-127.
2. *Евтушенко Ю.Г.* Численный метод поиска глобального экстремума функций (перебор на неравномерной сетке) // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1971. – Т.11, №6. – С.1394-1403.
3. *Квасов Д.Е., Сергеев Я.Д.* Многомерный алгоритм глобальной оптимизации на основе адаптивных диагональных кривых // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2003. – Т. 43, №1. – С. 42-59.
4. *Орлянская И.В.* Современные подходы к построению методов глобальной оптимизации // Электронный журнал «Исследовано в России». http://zhurnal.ape.relarn.ru/ articles/2002/189.pdf.
5. *A. Molinaro, C. Pizzuti, Ya.D. Sergeyev* Acceleration tools for diagonal information global optimization algorithms // Computational Optimization and Applications. – 2001. – Vol. 18, No 1. – P. 5-26.
6. *Yaroslav D. Sergeyev and Dmitri E. Kvasov* Global Search Based on Efficient Diagonal Partitions and a Set of Lipschitz Constants // SIAM: Journal of Optimization. – 2006. – Vol. 16. – No 3. – P. 910-937.
7. *Jones D.R., Perttunen C.D., and Stuckman B.E.* Lipschitzian optimization without the Lipschitz constant // Journal of Optimization Theory and Applications. – 1993. – Vol. 79, No 1. – P. 157-181.

Статья представлена к публикации членом редколлегии О.В. Абрамовым.