



15. *Нагорнов В. П.* Аналитическое определение параметров субструктуры деформированных поликристаллов в рентгеновском методе аппроксимации с использованием функций Коши //Аппаратура и методы рентгеновского анализа. – Л.: Машиностроение, 1982. – Вып. 28. – С. 67-71.
16. *Динс Д., Виниард Д.* Радиационные эффекты в твердых телах. – М.: ИЛ, 1960.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Д. Плутенко.

УДК 517.958 : 539.3 : 624.04

© 2007 г. **Н.Н. Любушкина,**
А.Н. Петрова, канд. техн. наук,
Н.А. Тарануха, д-р техн. наук

(Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет)

ПРОГРАММНО-ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ СТЕРЖНЯ С БОЛЬШИМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ

Предложена математическая модель колебательного процесса в стержне с учетом больших деформаций. Речь идет о упругих материалах, деформации в которых достигают сотен процентов. Для простейшей классической модели (стержень с массой) определены характеристики упругого материала. Динамические характеристики получены с помощью нового программно-информационного обеспечения, позволяющего снимать и рассчитывать параметры колебательного процесса в стержне.

Введение

Динамические процессы, происходящие в стержневой системе, выполненной из упругого материала, трудно формализуются. В таких материалах на разных этапах деформирования существенно меняются как геометрические характеристики стержневых элементов конструкции, так и физические характеристики материала (модуль упругости и коэффициент Пуассона). Для такой задачи закон Гука в его классической (линейной) постановке не соблюдается. Связь между напряжениями и деформациями имеет сложный нелинейный характер.

Программно-информационное обеспечение для расчета задач о колебаниях стержневых систем многообразно. Подобные программные продукты, как правило, обеспечивают расчет напряженно-деформированного состояния, собственных частот и форм колебаний, анализ устойчивости, ре-

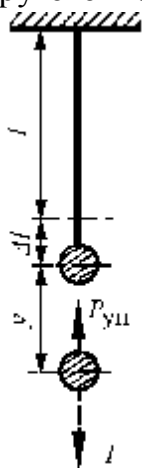
шение задач теплопередачи, исследование установившихся и неустановившихся процессов, нелинейных статических процессов, нелинейных динамических переходных процессов, анализ частотных характеристик при воздействии случайных нагрузок, спектральный анализ. Решению подобных задач посвящена обширная литература, рассматривающая нелинейные процессы при колебаниях стержней, пластин и оболочек [1, 2, 4].

Однако в большинстве работ и программных продуктов статические и динамические характеристики вводятся как исходные данные. В них не предусмотрены возможности экспериментального снятия показателей колебательного процесса для определения динамических параметров элементов конструкций. Моделирование подобных конструкций проводится с рядом упрощений, таких как процедура расчета итерационная, деформации на каждом этапе малы до (0,2 %), зависимость напряжения от деформации подчиняется закону Гука, перемещения узлов конструкции малы.

В данной статье рассмотрены математическая модель колебательно-го процесса стержневой системы при больших деформациях и программно-информационное обеспечение, позволяющее определять коэффициенты предложенной математической модели.

Математическая модель колебательного процесса в стержневой системе с большими деформациями

Собственные колебания. Рассмотрим простейшую классическую модель колеблющейся системы – стержень с массой. Стержень изготовлен из упругого материала, подвержен растяжению от действия груза на конце весом P (рис. 1).



Свободные колебания стержня, несущего одну сосредоточенную массу $m = P/g$, возникают в результате какого-либо начального отклонения.

Рассматриваются только вертикальные перемещения массы (система имеет одну степень свободы) и колебания груза относительно положения равновесия, полученного в результате удлинения стержня на величину Δl , пропорциональную:

$$\Delta l = F_l(P, r),$$

где F_l – функция изменения удлинения; r – жесткость стержня.

Рис. 1. Схема нагружения.

В качестве растягивающей силы выступает вес груза P . Жесткость системы зависит от свойств материала и размеров стержня. Упругий стержень выполнен из материала, имеющего нелинейные жесткостные характеристики. Если материал допускает большие деформации и зависимость $S(e)$ является нелинейной функцией деформации [7], жесткость системы r в общем виде определяется некоторой функцией F_r :

$$r = F_r(E, m, S, l), \quad (1)$$

где E – модуль упругости; m – коэффициент Пуассона; S – площадь поперечного сечения стержня; l – длина стержня.

Удлинение Δl с учетом (1) можно определить зависимостью:

$$\Delta l = F_l(P, F_r(E, m, S, l)). \quad (2)$$

Работа сооружения зависит от механических свойств материала, описываемых математическими выражениями, – например (2).

Пренебрегая сопротивлением воздуха, свободные колебания груза можно описать дифференциальным уравнением, учитывающим силу инерции [5]:

$$y'' + 2by' + \omega^2 y = 0,$$

где $\omega^2 = r/m$ – частота свободных незатухающих колебаний; b – коэффициент затухания, зависящий от рода материала, частоты колебаний и величины нагрузки.

Так как частота свободных незатухающих колебаний зависит от жесткости системы (1), выражение частоты и коэффициента затухания можно записать в виде:

$$\omega(F_r(E, m, S, l)) = \sqrt{\frac{F_r(E, m, S, l)}{m}}, \quad b(F_r(E, m, S, l)) = \frac{g}{\sqrt{4p^2 + g^2}} \sqrt{\frac{F_r(E, m, S, l)}{m}}.$$

Таким образом, при исследовании свойств стержня необходимо опытным путем определить динамические характеристики образца – логарифмический декремент затухания за один период g . Частота свободных колебаний зависит от статических свойств материала, поэтому необходимо найти статические характеристики материала (2).

Определение статических характеристик материала. Упругие свойства изотропного материала характеризуются упругими характеристиками: модулем нормальной упругости E , коэффициентом Пуассона m .

Действующие на тело силы вызывают изменение его размеров и формы. Перемещения всякой точки тела, выполненного из упругого материала, вызываются только деформациями e . Напряжение s в каждой точке – функция деформации, площади поперечного сечения S , свойств материала:

$$s = f(e, m, S).$$

При этом можно экспериментально определить зависимости:

$$e_y = \frac{\Delta y}{y}, \quad e_x = \frac{\Delta x}{x}, \quad e_z = \frac{\Delta z}{z}.$$

По экспериментальным данным построены следующие характеристики: зависимость деформации от приложенной силы (рис. 2).

Деформационные характеристики стержня по осям нелинейны и различны. Кривая $P(e)$ нелинейная, имеет несколько зон: первоначального напряжения, замедленного роста напряжения, ускоренного роста напряжения. В расчетах желательно всю кривую аппроксимировать одной зависи-

мостью, так как она определяет функцию жесткости материала F_r (1). Программный продукт должен иметь возможность задания этой зависимости.

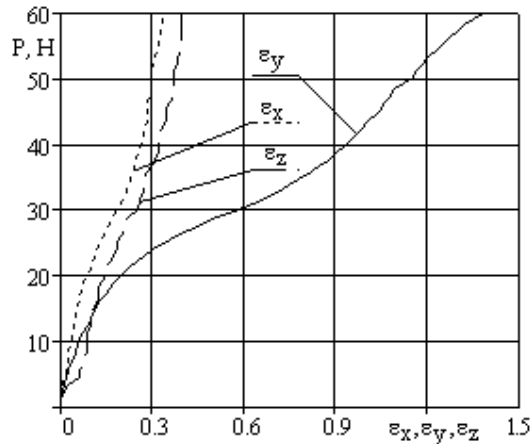


Рис. 2. Изменение деформации в зависимости от приложенной силы.

Для материала отношение поперечной деформации к продольной определяет коэффициент Пуассона:

$$m_{i,j} = \frac{e_i}{e_j},$$

где $i, j = x, y, z$, комбинации должны соответствовать условию $i \neq j$.

Зависимость напряжения от продольной деформации e_y (с учетом изменения площади) аппроксимируем полиномом:

$$a_5 \cdot y^5 + a_4 \cdot y^4 + a_3 \cdot y^3 + a_2 \cdot y^2 + a_1 \cdot y^1 + a_0.$$

Таким образом, функция F_l имеет вид:

$$\Delta l = l \cdot \left(c_5 \cdot \left(\frac{N}{S} \right)^5 + c_4 \cdot \left(\frac{N}{S} \right)^4 + c_3 \cdot \left(\frac{N}{S} \right)^3 + c_2 \cdot \left(\frac{N}{S} \right)^2 + c_1 \cdot \left(\frac{N}{S} \right)^1 + c_0 \right),$$

где $S = F_S(N)$ – полиномиальная функция изменения площади поперечного сечения, зависящая от усилия.

Вынужденные колебания. При действии на систему активной силы, изменяющейся по гармоническому закону

$$P(t) = P_0 \sin(Qt),$$

где P_0 – амплитуда возмущающей силы; Q – частота возмущающей силы, а дифференциальное уравнение вынужденных колебаний имеет вид [5]:

$$y'' + 2by' + w^2 y = \frac{1}{m} P(t). \quad (3)$$

Общий интеграл дифференциального уравнения (3) можно получить в виде двух решений:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t), \quad (4)$$

где $y_1(t)$ – общий интеграл однородного дифференциального уравнения; $y_2(t)$ – частный интеграл неоднородного дифференциального уравнения, зависящий от вида функции $P(t)$.

Найдем решение однородного дифференциального уравнения (4); ха-

характеристическое уравнение имеет вид:

$$x^2 + 2bx + w^2 = 0.$$

После преобразований можно прийти к решению в виде:

$$y_1(t) = a \cdot e^{-bt} \sin(w_1 t + j), \quad (5)$$

где a – амплитуда колебания; j – начальная фаза колебания, определяе-

мая начальным состоянием системы; $w_1 = \sqrt{\frac{F_r(E, m, S, l)}{m} \cdot \left(1 - \frac{g^2}{4p^2 + g^2}\right)}$ –

частота затухающих колебаний.

Решение однородного дифференциального уравнения с учетом (1) можно найти в виде:

$$y_1(t) = a \cdot e^{-\left(\frac{g}{4p^2 + g^2} \cdot \sqrt{\frac{F_r(E, m, S, l)}{m}}\right)t} \cdot \sin\left(\left(\sqrt{\frac{F_r(E, m, S, l)}{m} \cdot \left(1 - \frac{g^2}{4p^2 + g^2}\right)}\right)t + j\right)$$

при начальных условиях $y(0) = y_0$, $y'(0) = x_0$:

$$a(F_r(E, m, S, l)) = \sqrt{y_0^2 + \frac{u_0^2}{F_r(E, m, S, l)}};$$

$$j(F_r(E, m, S, l)) = \arctg\left(\frac{y_0}{u_0} \sqrt{\frac{u_0^2}{F_r(E, m, S, l)}}\right).$$

Частное решение $y_2(t)$ можно найти в виде:

$$y_2(t) = M \sin(Qt + d), \quad (6)$$

где M – амплитуда колебания; d – фаза колебания, или с учетом (1):

$$y_2(t) = M(F_r(E, m, S, l)) \cdot \sin(Qt + d(F_r(E, m, S, l))).$$

Тогда амплитуда и фаза колебания определяются выражениями:

$$M(F_r(E, m, S, l)) = \frac{P_0}{F_r(E, m, S, l)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{m \cdot Q^2}{F_r(E, m, S, l)}\right)^2 + \frac{4 \cdot g^2}{4p^2 + g^2} \cdot \frac{F_r(E, m, S, l)}{m} \cdot Q^2}};$$

$$d(F_r(E, m, S, l)) = \arctg\left(\frac{2 \cdot \frac{g}{\sqrt{4p^2 + g^2}} \cdot \sqrt{\frac{F_r(E, m, S, l)}{m}} \cdot Q}{\frac{F_r(E, m, S, l)}{m} - Q^2}\right).$$

Общий интеграл уравнения (3), согласно (4), (5) и (6), определяется выражением:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = a \cdot e^{-bt} \sin(\omega_1 t + j) + \frac{y_{cm}}{\sqrt{\left(1 - \frac{Q^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4b^2 Q^2}{\omega^4}}} \cdot \sin(Q t + d). \quad (7)$$

Анализ уравнения (7) показывает, что движение системы представляется суммой двух колебательных движений: одно – с частотой собственных колебаний ω_1 , – с течением времени затухает, другое совершается с частотой возмущающей силы Q и постоянной амплитудой.

Уравнение (7) определяет математическую модель затухающего колебания стержня с большими деформациями при начальных условиях $y(0) = y_0$, $y'(0) = x_0$ и допущениях: зависимость $s(e)$ с учетом изменения геометрии поперечного сечения – полиномиальная функция 5-го порядка.

Программно-информационное обеспечение

Назначение рассматриваемого программно-информационного обеспечения (ПИО), описываемого ниже, – получение зависимостей для определения динамических характеристик материала (логарифмический декремент затухания, коэффициент затухания) и параметров образцов (амплитуда колебания, период колебания) для расчета физически нелинейной математической модели колебания стержня с большими деформациями. Определение динамических характеристик происходит из анализа зависимости координат перемещения узла во времени. Для функционирования ПИО необходим набор аппаратно-программных средств, приведенный на рис. 3. На рис. 3 используются следующие обозначения: 1 – поперечная балка; 2 – резиновый стержень; 3 – устройство для снятия сигнала; 5 – нить; 6 – основание; 4, 7, 8 – грузы; 9 – стальная стержневая система; 10 – ПИО на базе ЭВМ.

После приведения системы в движение для измерения координат узла используется измерительное устройство 3, собранное на базе микроконтроллера компьютерной мыши. Ввод и обработку информации осуществляет ПИО.

Программа, фиксирующая перемещения узла стержня, работает в режиме эмуляции DOS. Сбор информации производится непосредственно с оптических датчиков устройства. Запись отсчетов производится в текстовый файл в виде набора значений перемещений и времени.

Результатом работы информационного модуля, выполняющего сбор отсчетов колебательного процесса, является файл, содержащий статистический ряд $l_i(t)$ измерений колебаний стержня. На рис. 4 приведены характеристики 10 опытов колебательного процесса со стержнем.

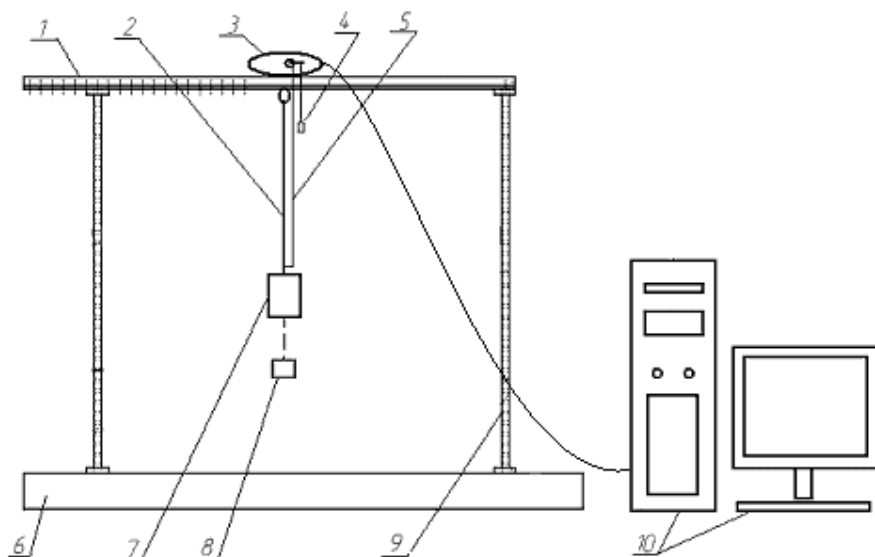


Рис. 3. Аппаратно-программный комплекс.

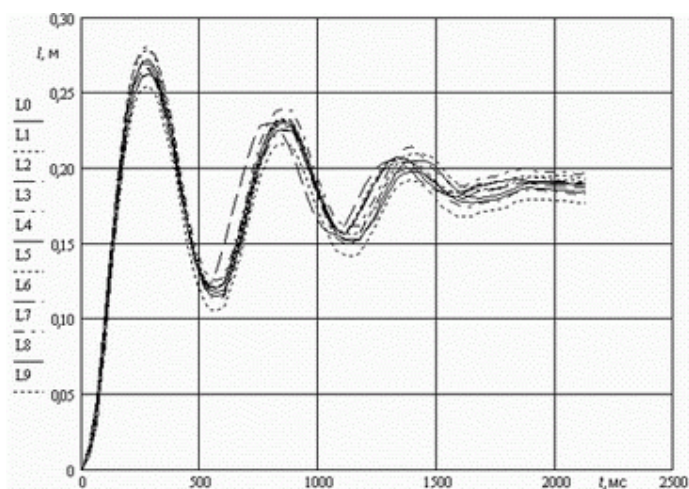


Рис. 4. L_0, L_1, \dots, L_9 – графики соответствующих экспериментов.

Зависимости, приведенные на рис. 4, не имеют среза, что объясняется отсутствием экранного ограничения, это свидетельствует о достоинствах ПИО; все графики имеют хорошую сходимость, что говорит о достоверности полученных результатов.

Для проведения дальнейших исследований экспериментальная зависимость, полученная в табличном виде, неудобна. Она должна быть представлена в виде аналитического выражения, в программном блоке ПИО.

На первом этапе для достижения более достоверных результатов полученный ряд экспериментальных зависимостей усредняется. Выбирается аппроксимирующая функция, которая отражает все важные особенности поведения образца с достаточной степенью точности. Аппроксимация производится на интервале времени от 0 до максимального значения.

Выражение затухающего колебания имеет вид:

$$f_1(t) = a \cdot e^{-bt} \sin(\omega_1 t + j) + c. \quad (8)$$

Используя методы аппроксимации, в ПИО определяются коэффициенты уравнения (8): амплитуда a ; коэффициент затухания b ; частота ω_1 ; сдвиг фазы колебания j ; установившееся значение c .

Затухающее колебание $f_1(t)$, определенное по зависимости (8) с рассчитанными коэффициентами, и экспериментальная зависимость $L(t)$ представлены на рис. 5.

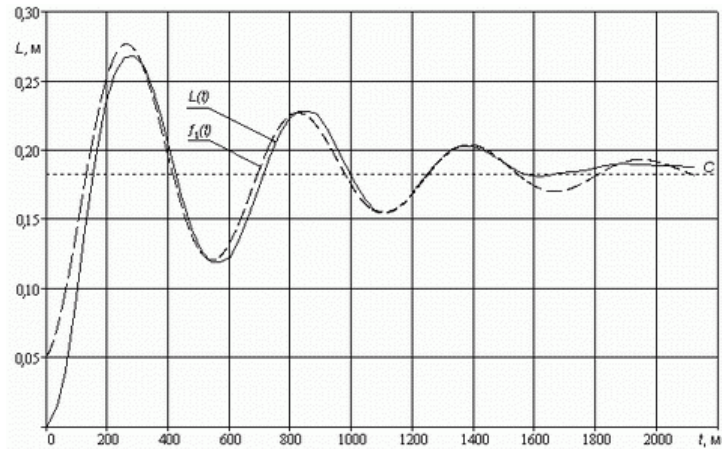


Рис. 5. Среднеарифметический график $L(t)$ и аналитическая функция $f_1(t)$.

График затухающего процесса $f_1(t)$ имеет предварительное смещение и не отображает экспериментальную зависимость в полном объеме. Для устранения этого явления предлагается полный закон колебания описывать выражением

$$f(t) = a \cdot e^{-bt} \cdot \sin(\omega_1 t + j) + c - \left(a_2 \cdot e^{-bt} \cdot \sin(\omega_1 t + j_2) + c \right) \cdot e^{-\frac{t}{T}}, \quad (9)$$

где a_2, j_2, T – некоторые дополнительно введенные соответственно амплитуда, начальная фаза и постоянная времени.

Аналитическая функция затухающего колебательного процесса $f(t)$ и экспериментальная зависимость $L(t)$ представлены на рис. 6.

Точность вычисления оценивается по относительному среднеквадратичному отклонению аналитической функции для всех точек эксперимента по формуле [6]:

$$d = \frac{1}{l_0 \cdot n} \sqrt{\sum_{i=1}^n (l(t_i) - f(t_i))^2} \cdot 100\%,$$

согласно которой погрешность для трех первых периодов составляет 0,8 %.

Сопоставление результатов

Определить правильность математической модели можно путем сопоставления данных, полученных экспериментально с помощью разрабатываемого авторами ПИО ($y_1(t)$), с результатами расчета по предложенной

математической модели, учитывающей большие нелинейные деформации ($y_2(t)$), и математической моделью, основанной на линейных деформациях ($y_3(t)$). Графики колебаний стержня для трех вариантов приведены на рис. 7. Зависимости $y_2(t)$ и $y_3(t)$ учитывают изменение геометрии образцов.

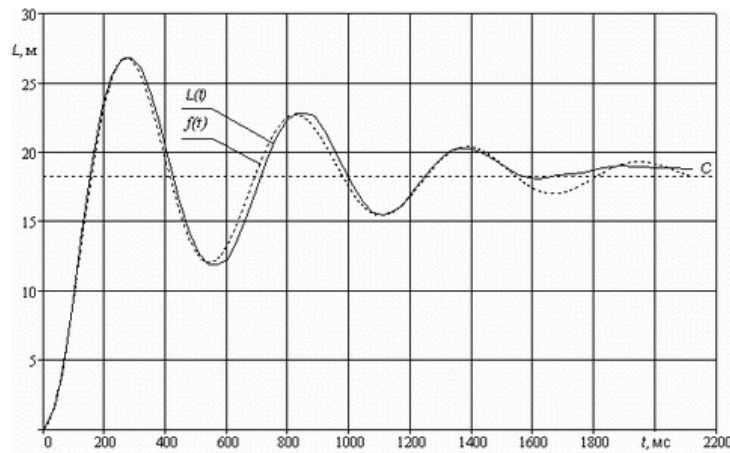


Рис. 6. Среднеарифметический график $L(t)$ и аналитическая функция $f(t)$ вида (9).

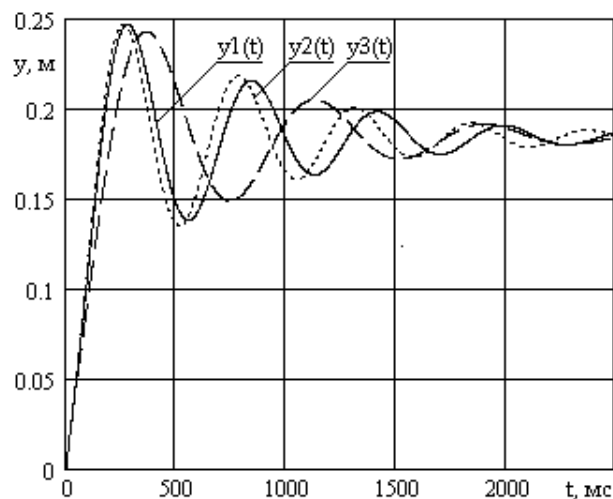


Рис. 7. Характеристики колебательного процесса.

Из графиков видно, что расчет, учитывающий большие нелинейные деформации, дает более точные результаты. Зависимости $y_1(t)$ и $y_2(t)$ коррелируются, а при сопоставлении $y_1(t)$ и $y_3(t)$ видно, что зависимость $y_3(t)$ находится в противофазе уже на втором периоде колебательного процесса.

Заключение

Математическая модель, предложенная в данной статье, позволяет произвести расчет колебательного процесса в стержне, испытывающем большие деформации (более 100 %). Исследованы статические характеристики упругого материала, определена деформационная характеристика $s(e)$. Это позволило уточнить формулу частоты собственных колебаний в

зависимости от жесткостных характеристик при больших деформациях.

Рассматриваемое ПИО позволило снять экспериментальную зависимость $y(t)$, рассчитать логарифмический декремент затухания g , коэффициент затухания b , сдвиг фазы j , определить значение постоянной времени T . По результатам работы ПИО закончено построение математической модели, учитывающей все особенности колебательного процесса, происходящего в стержне. Данное ПИО может быть применено для исследования других упругих материалов, динамические характеристики которых неизвестны. Все результаты могут быть использованы при дальнейшем расчете конструкций в других программных пакетах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. – М.: Высш. школа, 1980.
2. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. – М.: Наука, 1972.
3. Иващенко Н.Н. Автоматическое регулирование. Теория и элементы систем. – М.: Машиностроение, 1973.
4. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Т. 3. / под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1988.
5. Снитко Н.К. Методы расчета сооружений на вибрацию и удар. –Л.: Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре, 1953.
6. Сухов А.Н. Математическая обработка результатов измерений: Учебное пособие. – М.: МИСИ им. В.В.Куйбышева, 1982.
7. Тарануха Н.А., Жеребко К.В., Петрова А.Н., Петров М.Р. Математическое моделирование безмоментной стержневой системы при больших перемещениях. //Известия вузов. Строительство. – 2003. – № 3. – С.12 -18.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Олейниковым.