УДК 517.977

© 2007 г. **Л.Н. Кривдина**
(Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет)

СИНТЕЗ *D*-СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫМИ ОБЪЕКТАМИ НА ОСНОВЕ ЛИНЕЙНЫХ МАТРИЧНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Рассматривается D-стабилизирующее управление дискретными объектами, обеспечивающее расположение собственных значений матрицы замкнутой системы в заданной области, характеризуемой линейными матричными неравенствами. Показано, что синтез таких регуляторов сводится к решению линейных матричных неравенств.

Введение

Одной из важных тем теории управления динамическими объектами является модальное управление, которое связано с построением регуляторов, обеспечивающих расположение собственных значений матрицы замкнутой системы в заданных точках комплексной плоскости [1]. Наряду с задачей модального управления можно рассматривать задачу, связанную с построением D-стабилизирующих регуляторов, при которых матрица замкнутой системы D-устойчива, т.е. ее собственные значения располагаются в заданной области D комплексной плоскости.

Целью данной работы является синтез регуляторов, которые обеспечивают D-устойчивость дискретного объекта относительно областей D, характеризуемых линейными матричными неравенствами. Такие области будем называть LMI-областями. Построение D-стабилизирующих регуляторов может быть эффективно осуществлено на основе теории линейных матричных неравенств [2 – 4], которые решаются с применением средств LMI Toolbox пакета Matlab.

В основу построения регуляторов будет положен тот факт, что условие D-устойчивости дискретного объекта выражается линейным матричным неравенством относительно неизвестной симметрической положительно определенной матрицы [4]. В частном случае, когда D совпадает с внутренностью круга единичного радиуса, D-устойчивость сводится к асимптотической устойчивости дискретной системы, а соответствующее линейное матричное неравенство является неравенством Ляпунова. Заметим, что задачи, связанные с синтезом стабилизирующих регуляторов дискретных объектов по состоянию и по выходу на основе линейных матричных неравенств, были рассмотрены в [4, 5].

В данной работе сформулировано необходимое и достаточное условие D-стабилизируемости дискретного объекта относительно произвольной LMI-области D и синтезирован D-стабилизирующий регулятор. На основе полученных результатов построены регуляторы, обеспечивающие D-устойчивость дискретного объекта относительно LMI-областей D_1 и D_2, где D_1 – внутренность круга радиуса $r \leq 1$; D_2 – ее пересечение с коническим сектором.

В качестве иллюстрирующих примеров для этих областей в статье построены D-стабилизирующие регуляторы дискретной модели перевернутого маятника.

Предварительные сведения

Рассмотрим линейный стационарный дискретный объект, описываемый в пространстве состояний разностным уравнением

$$x_{t+1} = Ax_t, \tag{1}$$

где $x_t \in \Re^{n_x}$ – состояние объекта; $A \in \Re^{n_x \times n_x}$ – заданная матрица.

Дискретный объект (1) называется D-устойчивым, если D-устойчива его матрица A. Квадратную матрицу назовем D-устойчивой, если все ее собственные значения лежат в области D комплексной плоскости.

В качестве области D рассмотрим области, характеризуемые линейными матричными неравенствами, т.е. LMI-области. Область D комплексной плоскости называется LMI-областью, если существуют симметрическая матрица $a = a^T \in \Re^{m \times m}$ и матрица $b \in \Re^{m \times m}$ такие, что

$$D = \{z \in C : f_D(z) < 0\}, \quad f_D(z) = a + zb + \bar{z}b^T, \tag{2}$$

где $f_D(z)$ принимает значения в пространстве эрмитовых $(m \times m)$-матриц. Функцию $f_D(z)$ будем называть характеристической функцией области D. Заметим, что LMI-области симметричны относительно действительной оси, так как для любого $z \in D$

$$f_D(\bar{z}) = \overline{f_D(z)} < 0.$$

Согласно данному определению для D-устойчивости матрицы A нужно, чтобы все ее собственные значения удовлетворяли неравенству $f_D(z) < 0$. Это означает, что надо проверить выполнение n_x неравенств $f_D(z_i) < 0$, где $z_i, i = 1, \dots, n_x$ – собственные значения матрицы A. Ввиду сложности выполнения такой процедуры можно воспользоваться тем, что согласно работе [4] D-устойчивость матрицы A эквивалентна разрешимости относительно неизвестной матрицы $X = X^T > 0$ линейного матричного неравенства

$$(a_{ij}X + b_{ij}AX + b_{ji}XA^T) < 0 \quad, i,\ j = 1,\ldots,m, \tag{3}$$

где $(a_{ij}X + b_{ij}AX + b_{ji}XA^T)$ – ij-й блок матрицы, стоящей в левой части неравенства (3); a_{ij} и b_{ij} – соответствующие элементы матриц a и b, входящие в характеристическую функцию (2). Левую часть неравенства (3), используя операцию кронекерова произведения $\otimes$, можно также представить как

$$a \otimes X + b \otimes (AX) + b^T \otimes (AX)^T.$$

Заметим, что матрица, стоящая в левой части неравенства (3), связана с функцией $f_D(z)$ в (2) подстановкой $(X, AX, XA^T) \leftrightarrow (1, z, \bar{z})$.

В общем случае к LMI-областям относятся вертикальные и горизонтальные полосы, круги, конические секторы. Пусть область D – внутренность круга радиуса 1 с центром в точке (0;0), определяемая неравенством $|z| < 1$. Так как

$$|z| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z|^2 < 1,$$

а

$$\bar{z}z < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & z \\ \bar{z} & -1 \end{pmatrix} < 0,$$

то характеристическая функция (2) для этой области записывается в виде

$$f_D(z) = \begin{pmatrix} -1 & z \\ \bar{z} & -1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующие ей линейные матричные неравенства представляются как

$$\begin{pmatrix} -X & AX \\ XA^T & -X \end{pmatrix} < 0.$$

Если даны LMI-области

$$D_1 = \{ z \in C : f_{D_1}(z) < 0 \},\ f_{D_1}(z) = a^{(1)} + zb^{(1)} + \bar{z}b^{(1)T},$$

$$D_2 = \{ z \in C : f_{D_2}(z) < 0 \},\ f_{D_2}(z) = a^{(2)} + zb^{(2)} + \bar{z}b^{(2)T},$$

то их пересечение $D = D_1 \cap D_2$ также является LMI-областью вида (2) с характеристической функцией

$$f_D(z) = \begin{pmatrix} f_{D_1}(z) & 0 \\ 0 & f_{D_2}(z) \end{pmatrix} = a + zb + \bar{z}b^T,$$

где $f_{D_1}(z)$ и $f_{D_2}(z)$ — характеристические функции областей D_1 и D_2, $a = \begin{pmatrix} a^{(1)} & 0 \\ 0 & a^{(2)} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b^{(1)} & 0 \\ 0 & b^{(2)} \end{pmatrix}$. LMI-области D соответствует линейное матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} a_{ij}^{(1)} X + b_{ij}^{(1)} AX + b_{ji}^{(1)} X A^T & 0 \\ 0 & a_{ij}^{(2)} X + b_{ij}^{(2)} AX + b_{ji}^{(2)} X A^T \end{pmatrix} < 0,$$
$i, j = 1,...,m$.

Постановка задачи

Пусть линейный стационарный дискретный управляемый объект описывается в пространстве состояний разностным уравнением

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t, \qquad (4)$$

в котором $x_t \in \Re^{n_x}$ – состояние объекта; $u_t \in \Re^{n_u}$ – управление; $A \in \Re^{n_x \times n_x}$ и $B \in \Re^{n_x \times n_u}$ – заданные матрицы. Рассматриваемый в этой работе синтез D-стабилизирующего управления для объекта (4) состоит в нахождении закона управления из класса линейных обратных связей по состоянию вида

$$u_t = q\, x_t, \qquad (5)$$

обеспечивающего D-устойчивость замкнутой системы (4), (5)

$$x_{t+1} = A_c x_t, \quad A_c = A + Bq, \qquad (6)$$

где $q \in \Re^{n_u \times n_x}$ – матрица параметров регулятора.

Управляемый дискретный объект (4) будем называть D-стабилизируемым, если существует закон управления (5) такой, что замкнутая система (6) D-устойчива. Или, другими словами, пара матриц (A, B) называется D-стабилизируемой, если существует матрица q такая, что матрица $A + Bq$ будет D-устойчивой.

Синтез *D*-стабилизирующего регулятора

Сформулируем теорему, устанавливающую необходимое и достаточное условие D-стабилизируемости объекта (4) для LMI-области D. Также в этой теореме укажем способ построения D-стабилизирующего регулятора.

Теорема. Пусть D — LMI-область вида (2). В таком случае дискретный объект (4) D-стабилизируем тогда и только тогда, когда существуют $(n_x \times n_x)$-матрица $X = X^T > 0$ и $(n_u \times n_x)$-матрица Z, удовлетворяющие линейному матричному неравенству

$$(a_{ij} X + b_{ij}(AX + BZ) + b_{ji}(X A^T + Z^T B^T)) < 0 \quad, i, j = 1,...,m. \qquad (7)$$

Если неравенство (7) разрешимо и такие матрицы X и Z найдены, то параметры линейной обратной связи D-стабилизирующего регулятора находятся как $q = Z X^{-1}$.

Доказательство. Объект (4) D-стабилизируем тогда и только тогда, когда система (6) D-устойчива. Это означает, что все собственные значения матрицы A_c лежат в заданной LMI-области D вида (2). Область D характеризуется линейным матричным неравенством (3), где $X = X^T > 0$, а матрица A заменена на матрицу замкнутой системы A_c. Это неравенство с учетом вида матрицы A_c представимо следующим образом:

$$(a_{ij}X + b_{ij}(AX + BqX) + b_{ji}(XA^T + Xq^TB^T)) < 0, \quad i, j = 1,...,m.$$

Обозначим $Z = qX$ и запишем полученное неравенство как линейное матричное неравенство относительно матриц X и Z, т.е. в виде (7). Если неравенство (7) разрешимо, то матрица параметров D-стабилизирующего регулятора q находится по формуле $q = ZX^{-1}$. Теорема доказана.

Проверка выполнения условия (7), а также нахождение матриц X и Z осуществляются с помощью стандартной команды feasp в пакете LMI Toolbox.

Если в качестве LMI-области взять область D_1 – внутренность круга радиуса $r \le 1$ с центром в точке (0; 0) (рис. 1), то она определяется неравенством $|z| < r$, $r \le 1$. Это неравенство может быть записано как

$$f_{D_1}(z) = \begin{pmatrix} -r & z \\ \bar{z} & -r \end{pmatrix} < 0.$$

В этом случае матрицы a и b, входящие в характеристическую функцию $f_{D_1}(z)$ вида (2), имеют вид

$$a = \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

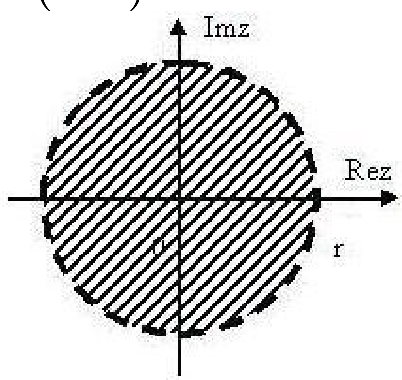

Рис. 1. LMI-область D_1.

Используя приведенную выше теорему, приходим к справедливости следующих утверждений.

Утверждение 1. Если D_1 – внутренность круга радиуса $r \le 1$ с центром в точке (0;0), то дискретный объект (4) D_1-стабилизируем тогда и только тогда, когда существуют $(n_x \times n_x)$-матрица $X = X^T > 0$ и $(n_u \times n_x)$-матрица Z, удовлетворяющие линейному матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} -rX & AX + BZ \\ XA^T + Z^TB^T & -rX \end{pmatrix} < 0. \qquad (8)$$

Если неравенство (8) разрешимо, то параметры D_1-стабилизирующего регулятора q находятся как $q = Z X^{-1}$.

Рассмотрим еще один возможный вариант LMI-области в случае дискретного объекта – область D_2, являющуюся пересечением области D_1 и конического сектора D_3, расположенного в левой комплексной полуплоскости. Так как LMI-область обладает свойством симметричности относительно действительной оси и в данном случае является частью внутренности круга единичного радиуса, то выполняется требование асимптотической устойчивости замкнутой системы (6). Конический сектор D_3, расположенный в левой комплексной полуплоскости, определяется неравенством $\operatorname{Re} z\, tg g < -|\operatorname{Im} z|$, где $\operatorname{Re} z < 0$, $0 < g < p/2$ (рис. 2).

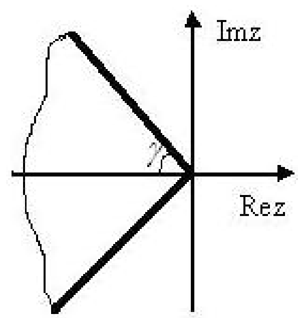

Рис. 2. LMI-область D_3.

Так как

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2},\ \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i},$$

то

$$\operatorname{Re} z\, tg g < -|\operatorname{Im} z| \iff \frac{(z+\bar{z})\sin g}{2\cos g} < -\frac{|z-\bar{z}|}{2i}.$$

Умножим полученное неравенство на $2i\cos g$ и получим неравенство, обе части которого отрицательны:

$$(z+\bar{z})\sin g < -|z-\bar{z}|\, i\cos g \iff (z+\bar{z})^2 \sin^2 g > -(z-\bar{z})^2 \cos^2 g .$$

Имеем:

$$(z+\bar{z})\sin g < 0, \quad (z+\bar{z})^2 \sin^2 g > -(z-\bar{z})^2 \cos^2 g ,$$

что равносильно следующему неравенству

$$\begin{pmatrix} (z+\bar{z})\sin g & (z-\bar{z})\cos g \\ -(z-\bar{z})\cos g & (z+\bar{z})\sin g \end{pmatrix} < 0 .$$

Это означает, что заданному коническому сектору соответствует характеристическая функция:

$$f_{D_3}(z) = \begin{pmatrix} (z+\bar{z})\sin g & (z-\bar{z})\cos g \\ -(z-\bar{z})\cos g & (z+\bar{z})\sin g \end{pmatrix}.$$

В таком случае матрицы a и b имеют вид:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \beta = \begin{pmatrix} \sin\gamma & \cos\gamma \\ -\cos\gamma & \sin\gamma \end{pmatrix}.$$

Соответствующие коническому сектору D_3 линейные матричные неравенства представляются так

$$\begin{pmatrix} (AX + XA^T)\sin\gamma & (AX - XA^T)\cos\gamma \\ -(AX - XA^T)\cos\gamma & (AX + XA^T)\sin\gamma \end{pmatrix} < 0, \quad X = X^T > 0.$$

Поскольку пересечением LMI-областей D_1 и D_3 является LMI-область D_2 (рис. 3) с характеристической функцией

$$f_{D_2}(z) = \begin{pmatrix} f_{D_1}(z) & 0 \\ 0 & f_{D_3}(z) \end{pmatrix},$$

то, применяя теорему, получаем следующее утверждение.

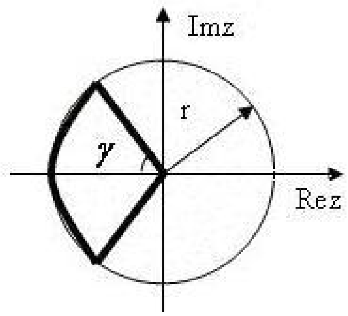

Рис. 3. LMI-область D_2.

Утверждение 2. Если D_2 – пересечение внутренности круга радиуса $r \leq 1$ с центром в точке (0;0) и конического сектора, расположенного в левой комплексной полуплоскости, то дискретный объект (4) D_2-стабилизируем тогда и только тогда, когда существуют $(n_x \times n_x)$-матрица $X = X^T > 0$ и $(n_u \times n_x)$-матрица Z, удовлетворяющие линейным матричным неравенствам

$$\begin{pmatrix} -rX & AX + BZ \\ XA^T + Z^T B^T & -rX \end{pmatrix} < 0,$$

$$\begin{pmatrix} (AX + XA^T + BZ + Z^T B^T)\sin\gamma & (AX - XA^T + BZ - Z^T B^T)\cos\gamma \\ -(AX - XA^T + BZ - Z^T B^T)\cos\gamma & (AX + XA^T + BZ + Z^T B^T)\sin\gamma \end{pmatrix} < 0. \tag{9}$$

Если неравенства (9) разрешимы, то параметры D_2-стабилизирующего регулятора находятся как $\theta = ZX^{-1}$.

Проиллюстрируем утверждения 1 и 2 на примерах.

Пример 1. D_1-стабилизирующее управление перевернутым маятником, где D_1 – внутренность круга радиуса r = 0.8 с центром в точке (0;0). Рассмотрим дискретную модель вида (4) перевернутого маятника $\ddot{\varphi} - \omega_0^2 \varphi = u$ (время дискретизации 0.1секунды), в которой

$$A = \begin{pmatrix} 1.543 & 0.1175 \\ 11.75 & 1.543 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0.005431 \\ 0.1175 \end{pmatrix}, \qquad w_0 = 10.$$

Проверим, является ли указанный дискретный объект D_1-стабилизируемым, т.е. разрешимо ли линейное матричное неравенство (8), если все собственные значения матрицы замкнутой системы лежат внутри круга с центром в точке z = 0 и радиусом, равным 0.8. С помощью LMI Toolbox (команда feasp) получим, что этот дискретный объект D_1-стабилизируем, и найдем матрицы X и Z:

$$X = \begin{pmatrix} 1.6450 & -5.1699 \\ -5.1699 & 34.7675 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} -137.0876 & 137.3345 \end{pmatrix}.$$

В результате матрица параметров регулятора q будет следующей:

$$q = \begin{pmatrix} -133.1515 & -15.8494 \end{pmatrix},$$

при этом собственные значения матрицы замкнутой системы равны $l_1 = 0.6997$, $l_2 = -0.1992$. Таким образом, регулятор, который D_1-стабилизирует дискретный объект с матрицами A и B, задается уравнением

$$u_t = \begin{pmatrix} -133.1515 & -15.8494 \end{pmatrix} x_t.$$

На рис. 4 представлены графики переходного процесса для j при значениях радиусов r =0.3 (пунктирная линия) и r = 0.8 (сплошная линия) и начальном условии $x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T$.

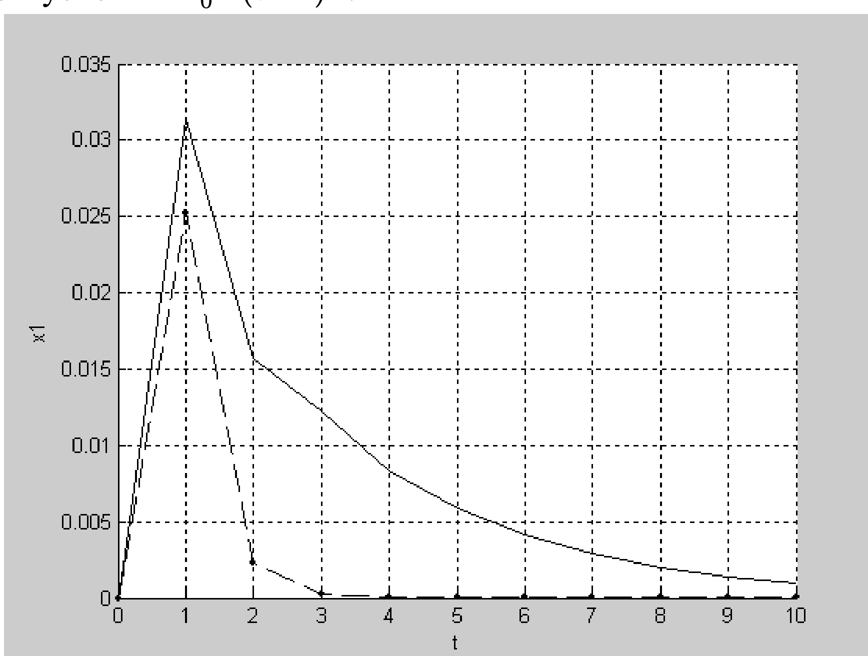

Рис. 4. График переходного процесса для области D_1.

Пример 2. D_2-стабилизирующее управление перевернутым маятником, где D_2 – пересечение внутренности круга радиуса r = 0.8 с центром в точке (0;0) и конического сектора с углом 45°, расположенного в левой комплексной полуплоскости.

Проверим, является ли дискретный объект (см. пример 1) D_2-стабилизируемым, т.е. разрешимы ли линейные матричные неравенства (9), если все собственные значения матрицы замкнутой системы лежат внутри пересечения конического сектора с углом, равным 45°, и круга радиуса 0.8 с центром в точке (0;0). С помощью LMI Toolbox (команда feasp) получим, что рассматриваемый дискретный объект D_2-стабилизируем, и найдем матрицы X и Z:

$$X = \begin{pmatrix} 0.2852 & -6.7502 \\ -6.7502 & 282.3741 \end{pmatrix}, \quad Z = 10^3 \begin{pmatrix} 0.0551 & -3.7890 \end{pmatrix}.$$

Получим матрицу параметров регулятора $q = \begin{pmatrix} -286.3270 & -20.2632 \end{pmatrix}$, при этом собственные значения матрицы замкнутой системы равны $l_1 = -0.3390$, $l_2 = -0.5110$. На рис. 5 представлен график переходного процесса для j в случае заданной LMI-области D_2 и начальном условии $x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T$.

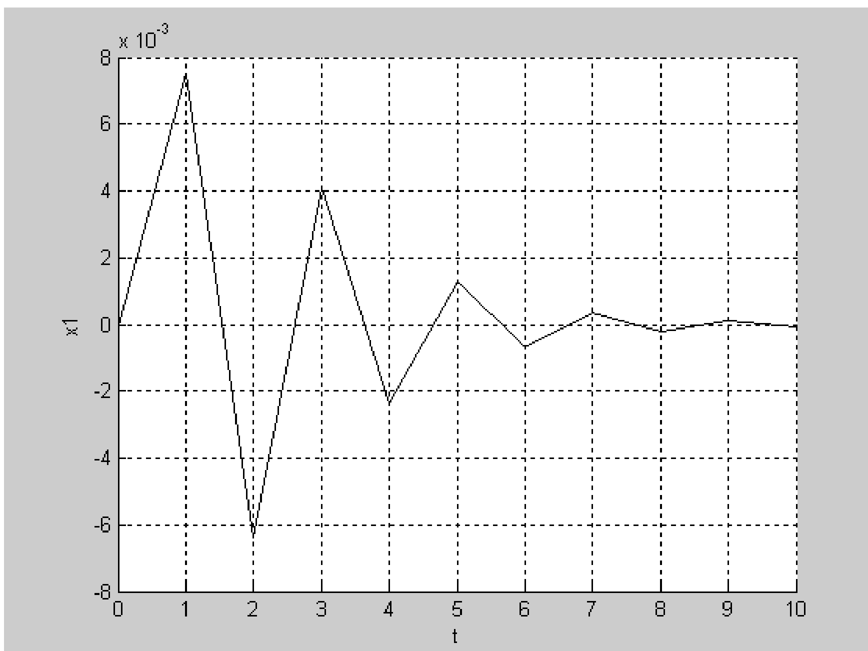

Рис. 5. График переходного процесса для области D_2.

Заключение

В данной статье поставлена и решена задача построения D-стабилизирующих регуляторов, обеспечивающих D-устойчивость линейных дискретных объектов относительно заданных LMI-областей. Рассмотрены два вида таких областей – внутренность круга радиуса $r \le 1$ и ее пересечение с коническим сектором. Синтез D-стабилизирующих регуляторов, основанный на решении линейных матричных неравенств, является эффективным и удобным методом решения рассмотренных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. – М: Наука, 1976.
2. ***Boyd S., Ghaoui L. El, Feron E. and Balakrishnan V.*** Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. – Philadeiphia: SIAM studies in Applied Mathematics, 1994.
3. ***Carsten Scherer and Siep Weiland.*** Lecture Notes DISC Course on Linear Matrix Inequalities in Control. – Version: May, 1997.
4. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. ─ М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
1. 5. *Кривдина Л.Н.* Стабилизация дискретных объектов по выходу на основе линейных матричных неравенств // Информатика и системы управления. – 2006. – № 2(12). – С.102-110.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.М. Коганом.

УДК 681.513.6

© 2007 г. **Д.А. Теличенко,** канд. тех. наук
(Амурский государственный университет, Благовещенск)

ЭТАЛОННЫЙ УПРЕДИТЕЛЬ В АДАПТИВНЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ SISO И MIMO-ОБЪЕКТАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ[1]

Для класса априорно неопределенных объектов с запаздыванием по управлению, состоянию и нейтрального типа рассмотрены различные способы построения непрерывных и гибридных систем адаптации на основе применения эталонного упредителя. Децентрализованный подход к синтезу непрерывных и многосвязных MIMO-объектов распространен на случай SISO-объектов.

Введение

Наиболее широким классом систем, имеющих значительное распространение на практике, являются многосвязные системы управления с запаздываниями [1]. Среди всего объема публикаций по данной тематике отдельно выделяются работы, использующие децентрализованный подход к синтезу законов управления [2, 3]. В случае, когда измерению доступен не весь вектор состояния объекта, чаще всего используется методика расширения ошибки слежения в совокупности с различными схемами компенса-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 07-08-00045).