УДК 517.19

© 2008 г. **А.С. Лосев**
(Уссурийский государственный педагогический институт)

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НАДЕЖНОСТИ СТОХАСТИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

Для мостиковых схем построен минимальный по числу арифметических операций алгоритм вычисления длины и псевдодлины кратчайшего пути. Определены узкие места в рассматриваемых схемах как минимальные совокупности ребер, изменение параметров которых приводит к изменению параметра надежности. Построен алгоритм вычисления узких мест.

Введение

Задача вычисления вероятности работы сети с ненадежными элементами естественно возникает в технических приложениях. Прямое вычисление вероятности работы сети требует геометрически растущего по количеству ребер числа арифметических операций, поэтому появляется необходимость использовать асимптотические методы. В работе [1] получены асимптотические соотношения для вероятности работы сети при различных условиях, накладываемых на асимптотики надежности ее элементов. Основными параметрами, входящими в эти соотношения, являются длина и псевдодлина кратчайшего пути.

Для мостиковых схем и схем, содержащих мостиковый элемент, построен минимальный по числу арифметических операций и линейный по числу ребер алгоритм вычисления длины и псевдодлины кратчайшего пути. Получены условия независимости длины и псевдодлины кратчайшего пути от параметров отдельных ребер.

Рассмотрена радиально-кольцевая схема общего вида, для которой также найдено асимптотическое соотношения для вероятности работы всей сети при фиксированных вершинах. Во всех рассматриваемых схемах определены узкие места как минимальные совокупности ребер, увеличение или уменьшение параметра которых приводит к изменению параметра надежности всего графа. Построен алгоритм вычисления узких мест.

Предварительные сведения

Рассмотрим неориентированный граф Г с конечным множеством вершин U, с множеством ребер $W = \{w= (u,v),\ u,\ v \in U\}$ и выделенной начальной u_0 и конечной u^0 вершинами. Обозначим R совокупность всех путей R графа Г, соединяющих начальную вершину u_0 с конечной u^0, и предположим, что $R \neq$ Ш. Сопоставим каждому ребру $w \in W$ графа Г число $б(w) = I(w$ работает), где $I(B)$ индикатор функции события B. Обозначим величину, характеризующую связность верши u_0, u^0 в Г

$$\beta = \bigcup_{R\in\Re} \bigcap_{w\in R} \alpha(w). \tag{1}$$

Предположим, что $б(w)$, $w\in W$ – независимые случайные величины,

$$P(\alpha(w)=1) = p_w(h), \quad q_w(h) = 1 - p_w(h), \tag{2}$$

где h – некоторый малый параметр: $h\to 0$. В [1] доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $p_w(h)\sim\exp(-h^{-d(w)})$, $h\to 0$, *где* $d(w)>0$, $w\in W$. *Тогда* $-\ln P(в=1)\sim h^{-D}$, *причем*

$$D = D(\Gamma) = \min_{R\in\Re}\max_{w\in R} d(w). \tag{3}$$

Теорема 2. *Пусть* $p_w(h)\sim h^{-g(w)}$, $h\to 0$, *где* $g(w)>0$, $w\in W$. *Тогда* $\ln P(в=1)\sim G \ln h$, *причем*

$$G = G(\Gamma) = \min_{R\in\Re}\sum_{w\in R} g(w). \tag{4}$$

Константы G, D можно интерпретировать как длину и псевдодлину, соответственно, кратчайшего пути.

Обозначим

$$\Re' = \{R\in\Re : \max_{w\in R} d(w) = D\}, \tag{5}$$

$$R' = \{w\in R : d(w) = D\},\ R\in\Re', \tag{6}$$

$$\mathrm{S} = \{R' : R\in\Re'\}. \tag{7}$$

Рассмотрим множество ребер, полученных извлечением из каждого R': $R\in\boldsymbol{R'}$ по одному ребру w. Совокупность всех таких множеств обозначим $\boldsymbol{T}$. Пусть $\boldsymbol{S'}$, $\boldsymbol{T'}$ – совокупность минимальных по включению множеств из $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{T}$. В [2] доказано утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $e_0 = \min(|D - d(w)|>0: w\in W)$.

1. *Для любого* $R'\in\boldsymbol{S}$ *и любого* e, $0< e < e_0$, *справедливо свойство* **(B)**: *при замене* $d(w)$ *на* $d(w) - e$ *для всех* $w\in R'$ *справедлива замена* $D\to D - e$.

2. *Если* $S\subseteq U$ *и удовлетворяет свойству* **(B)**, *то* $\exists S_*\in\boldsymbol{S}$: $S_*\subseteq S$.

3. *Для любого* $T\in\boldsymbol{T}$ *и любого* e, $0< e < e_0$, *справедливо свойство* **(C)**: *при замене* $d(w)$ *на* $d(w)+ e$ *для всех* $w\in T$ *справедлива замена* $D\to D + e$.

4. *Если* $T\subseteq U$ *и удовлетворяет свойству* **(C)**, *то* $\exists T_*\in\boldsymbol{T}$: $T_*\subseteq T$.

Замечание 1. В силу утверждения 1 (утверждения 3) теоремы 3 увеличение (уменьшение) надежности элементов $z\in S$ ($z\in T$) для любого множества $S\in\mathbf{S}$ ($T\in\mathbf{T}$) позволяет увеличить (уменьшить) надежность графа Г. А в силу утверждения 2 и 4 множества **S', T'** можно назвать узкими местами в графе Г.

Мостиковая схема

Рассмотрим неориентированный граф Г со множеством вершин $U = \{1, 2, 3, 4\}$ и множеством ребер $W = \{12, 13, 24, 34, 23\}$, вершина 1 – начальная, а 4 – конечная (рис. 1). Данная схема [3] называется мостиковой, а ребро (2,3) – мости-

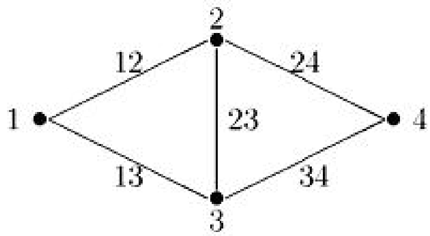

Рис. 1. Мостиковая схема.

ковым элементом.

Рассчитаем надежность мостиковой схемы $P(\Gamma)$ в предположении, что ребра $w = (i,j)$ работают независимо, с вероятностью p_{ij}, $(i,j)\in W$, положим $q_{ij}= = 1 - p_{ij}$. Определим Γ^0 граф, полученный из Γ исключением ребра $(2,3)$. Обозначим Γ^1 граф, получившийся из Γ^0 склеиванием вершин *2, 3*. По формуле полной вероятности [4] надежность

$$P(\Gamma) = p_{23}P(\Gamma^1) + (1 - p_{23})P(\Gamma^0), \qquad (8)$$

где $P(\Gamma^1)=(1- q_{12}\, q_{13})\,(1- q_{24}\, q_{34})$, $P(\Gamma^0)=[1-(1- p_{12}\, p_{24})\,(1- p_{13}\, p_{34})]$.

Таким образом, зная p_{ij}, $(i,j) \in W$, можно рассчитать надежность $P(\Gamma)$, используя $n_P(\Gamma) = 14$ арифметических операций.

Если $p_{ij} = p_{i,j}(h) \sim \exp(-h^{-d(i,j)})$, $h\to 0$, *где* $d(i,j) > 0$, $i,j\in W$, то, используя теорему 1 и формулу (8), можно получить, что:

$$-\ln P(\Gamma) \sim h^{-D(\Gamma)},\ \ D(\Gamma) = \min[\max[d_{23}, D(\Gamma^1)], D(\Gamma^0)], \qquad (9)$$

где $D(\Gamma^0) = \min(\max(d_{12}, d_{24}), \max(d_{13}, d_{34}))$, $D(\Gamma^1) = \max(\min(d_{12}, d_{13}),\min(d_{24}, d_{34}))$.

Если $p_{ij} = p_{i,j}(h) \sim h^{-g(i,j)}$, $h \to 0$, *где* $g(i,j) > 0$, $i,j\in W$, то, используя теорему 2 и формулу (8), нетрудно получить, что:

$$\ln P(\Gamma) \sim G(\Gamma)\ln h,\ \ G(\Gamma) = \min[g_{23} + G(\Gamma^1), G(\Gamma^0)], \qquad (10)$$

где $G(\Gamma^0)=\min((g_{12} + g_{24}), (g_{13} + g_{34}))$, $G(\Gamma^1)=\min(g_{12}, g_{13}) + \min(g_{24}, g_{34})$.

Схема с мостиковым элементом

Рассмотрим неориентированный граф $\acute{\Gamma}$ со множеством вершин $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ и множеством ребер $W = \{01, 02, 13, 24, 23, 14, 34, 35, 45\}$, вершина 0 – начальная, а 5 – конечная (рис. 2). Ребро (3,4) – мостиковый элемент, в терминологии [3] данная схема называется структурой двух “звезд”, включенных на “треугольник”.

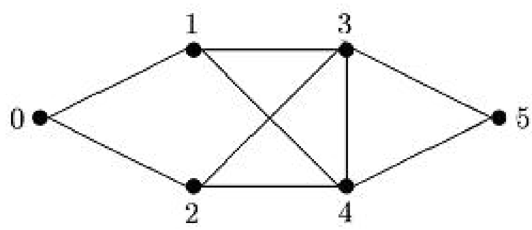

Рис. 2. Схема двух «звезд», включенных на «треугольник».

Определим $\acute{\Gamma}^0$ граф, полученный из $\acute{\Gamma}$ исключением ребра $(3,4)$. Обозначим $\acute{\Gamma}^1$ граф, получившийся из $\acute{\Gamma}^0$ склеиванием вершин *3,4*. Рассчитаем надежность схемы $P(\acute{\Gamma})$ в предположении, что ребра $w = (i,j)$ работают независимо, с вероятностью p_{ij}, $(i,j) \in W$. Если $p_{ij} = p_{i,j}(h) \sim \exp(-h^{-d(i,j)})$, $h \to 0$, *где* $d(i,j) > 0$, $i,j\in W$, то, используя теорему 1 и формулу (8), можно получить, что:

$$-\ln P(\acute{\Gamma}) \sim h^{-D(\acute{\Gamma})},\ \ D(\acute{\Gamma}) = \min(\max[d_{34}, D(\acute{\Gamma}^1)], D(\acute{\Gamma}^0)), \qquad (11)$$

здесь $D(\acute{\Gamma}^0) = \min(\max(C_1, d_{35}),\max(C_2, d_{45}))$, $D(\acute{\Gamma}^1) = \max(\min(C_1, C_2),\min(d_{35}, d_{45}))$, где $C_1 = \min(\max(d_{01}, d_{13}), \max(d_{02}, d_{23}))$, $C_2 = \min(\max(d_{01}, d_{14}), \max(d_{02}, d_{24}))$.

Если $p_{ij} = p_{i,j}(h) \sim h^{-g(i,j)})$, $h \to 0$, *где* $g(i,j) > 0$, $i,j \in W$, то, используя теорему 2 и формулу (8), нетрудно получить, что:

$$\ln P(\Gamma) \sim G(\Gamma) \ln h, \quad G(\Gamma) = \min[g_{34} + G(\Gamma^1), G(\Gamma^0)], \tag{12}$$

здесь $G(\Gamma^0) = \min((F_1 + g_{35}), (F_2 + g_{45}))$, $G(\Gamma^1) = \min(F_1, F_2) + \min(g_{35}, g_{45})$, где

$F_1 = \min((g_{01} + g_{13}), (g_{02} + g_{23}))$,

$F_2 = \min(\max(g_{01} + g_{14}), \max(g_{02} + g_{24}))$.

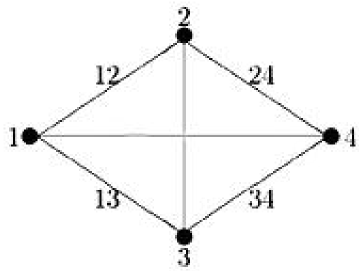

Рис. 3. Универсальная эквивалентная схема трансформатора Г*.

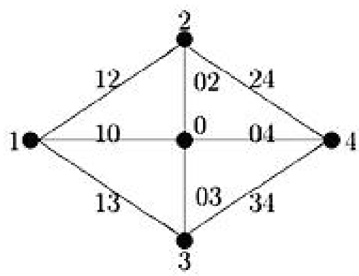

Рис. 4. Радиально-кольцевая схема.

Модификация мостиковой схемы

Построим граф Γ_* (универсальную эквивалентную схему трансформатор [5]), дополнив Г ребром 1,4 (рис. 3), тогда нетрудно получить

$$\begin{aligned} D(\Gamma_*) &= \min[d_{14}, D(\Gamma)], \\ G(\Gamma_*) &= \min[d_{14}, G(\Gamma)]. \end{aligned} \tag{13}$$

Так как граф Γ_* является полным, то формулы (13) можно распространить на случай, когда рассматривается связность любых двух вершин графа. Для этого достаточно перенумеровать вершины графа и воспользоваться формулами (9), (10), (13).

Теперь рассмотрим предложенную в [6, рис. 1] радиально-кольцевую схему Γ^* с центром в вершине 0 (рис. 4).

Для схемы Γ^* нетрудно выписать следующее соотношение:

$$D(\Gamma^*) = \min[D_+(\Gamma^*), D_-(\Gamma^*), D_{+-}(\Gamma^*), D_{-+}(\Gamma^*)]. \tag{14}$$

Здесь $D_+(\Gamma^*) = \min[\max(d_{12}, d_{24}), \max(d_{12}, d_{20}, d_{04}), \max(d_{10}, d_{04}), \max(d_{10}, d_{02}, d_{24})]$

$D_-(\Gamma^*)$ определяется аналогично, с тем лишь условием, что индекс 2 заменен на индекс 3.

$D_{+-}(\Gamma^*) = \max(d_{12}, d_{20}, d_{03}, d_{34})$, $D_{-+}(\Gamma^*) = \max(d_{13}, d_{30}, d_{02}, d_{24})$.

В свою очередь,

$$G(\Gamma^*) = \min[G_+(\Gamma^*), G_-(\Gamma^*), G_{+-}(\Gamma^*), G_{-+}(\Gamma^*)], \tag{15}$$

где $G_+(\Gamma^*)$, $G_-(\Gamma^*)$, $G_{+-}(\Gamma^*)$, $G_{-+}(\Gamma^*)$ определяются так же как и $D_+(\Gamma^*)$, $D_-(\Gamma^*)$, $D_{+-}(\Gamma^*)$, $D_{-+}(\Gamma^*)$ с той лишь оговоркой, что операция максимизации заменена на операцию суммирования.

Данное рассмотрение можно распространить на радиально-кольцевые схемы общего вида Γ^{**} (с одним центром и произвольным числом вершин на кольце). Для этого схема Γ^{**} разрезается по радиусам, соединяющим центр с начальной и конечной вершинами, на две подсхемы (верхнюю и нижнюю), после чего строим соотношения типа (14).

Предположим, что верхняя подсхема состоит из вершин 0, 1, 2, ..., n и из ребер 12, 23, …, n – 1n, 10, 20, …, n0 (рис. 5).

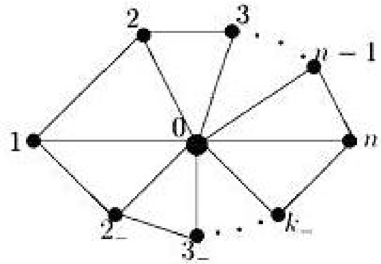

Рис. 5. Радиально-кольцевая схема Γ^{**}.

Определим пути:

$R_+(i, j) = 12\ldots i0j(j+1)\ldots n$, $1 \le i < j \le n$,

$R_+(i, i) = 12\ldots i(i+1)\ldots n$, $1 \le i \le n$, тогда

$$D_+(\Gamma^{**}) = \min_{1\le i\le j\le n} \max_{w\in R_+(i,j)} d_w. \qquad (16)$$

Пусть нижняя подсхема состоит из вершин 0, 1_, 2_,...,k_, n, $k \le n$ и из ребер 12_, 2_3_,…,(k – 1)_k_, k_ n, 10, 2_0,…, k_0, n0, и $R\_(i, j) = 12\_\ldots i\_0j\_(j+1)\_\ldots k\_n$, $1 \le i < j \le n$, $R\_(i, i) = 12\_\ldots i\_(i+1)\_\ldots k\_n$, $1 \le i \le n$, тогда

$$D_-(\Gamma^{**}) = \min_{1\le i\le j\le n} \max_{w\in R_-(i,j)} d_w. \qquad (17)$$

А также пути: $R_+[i] = 12\ldots i0$; $R\_[i] = 12\_\ldots i\_0$, $R^+[i] = 0i(i+1)\ldots n$; $R^-[i] = 0i\_(i+1)\_\ldots k\_n$, $1 < i < n$, тогда.

$$D_{+-}(\Gamma^{**}) = \min_{1\le i,\, j\le n} \max_{w\in R_+[i]\cup R^-[j]} d_w, \quad D_{-+}(\Gamma^{**}) = \min_{1\le i,\, j\le n} \max_{w\in R_-[i]\cup R^+[j]} d_w$$

После чего для определения $D(\Gamma^{**})$ используем формулу (14).

Заключение

В качестве заключения рассмотрим приложение к моделям времени жизни. Пусть $\phi(w)$ – независимые величины, имеющие смысл жизни ребер $w\in W$. Обозначим $P(\phi(w) > t) = p_w(h)$ и положим время жизни Г равным

$$\tau(\Gamma) = \min_{R\in\Re} \max_{w\in R} \tau(w).$$

Тогда если $h = h(t)$ – монотонно убывающая и непрерывная функция и $h\to 0$ при $t\to\infty$, то теоремы 1, 2 остаются верными при замене $P(в = 1)$ на $P(\phi(\Gamma) > t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tsitsiashvili G.Sh.* Asymptotic Analysis of Logical Systems with Anreliable Elements// Reliability: Theory and Applications. – 2007. – Vol. 2, № 1. – P.34-37.
2. Tsitsiashvili G.Sh. Bottlenecks in general type logical system with unreliable elements. // Reliability and Risk Analysis: Theory and Applications. – 2008. – Vol. 1, № 1. – P.64-68.
3. *Рябинин И.А.* Надежность и безопасность структурно-сложных систем. – СПб.: Изд-во СПб. гос. ун-та, 2007.
4. *Беляев Ю.К., Богатырев В.А., Болтников В.В.* Надежность технических систем. Справочник / под ред. И.А.Ушакова. – М.: Радио и связь, 1985.
5. *Чернее Х.И.* Индуктивные связи и трансформации в электрических фильтрах. – М.: Изд-во литературы по вопросам связи и радио, 1962.
6. *Dohmen K.* Improved inclusion-exclusion and inequalities based on particular class of abstract tubes. // Electronic Journal of Probability. – 1999. – Vol. 4, № 5. – P.1-12.
7. *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р.* Алгоритмы: построение и анализ. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2004.

Статья представлена к публикации членом редколлегии О.В. Абрамовым.