УДК 574.3, 519.7

© 2009 г. **Е.В. Ашихмина,** канд. биол. наук,
Ю.Г. Израильский, канд. техн. наук
(Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток)

ОПТИМИЗАЦИИ ПРОМЫСЛА ПОПУЛЯЦИЙ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ ИЗМЕНЕНИИ ЛИМИТИРУЮЩИХ РОСТ ЧИСЛЕННОСТИ ФАКТОРОВ СРЕДЫ

Решается задача оптимизации промысла популяций, динамика численности которых описывается риккеровской моделью, при изменении лимитирующих популяционный рост факторов внешней среды в цикле длины два и три. Показана зависимость интенсивности промысла, долей изъятия и общего изъятия из популяции от интенсивности изменения лимитирования.
***Ключевые слова**:* динамика численности популяций, модель Риккера, оптимизация промысла, лимитирование численности, факторы внешней среды, циклические изменения.

Введение

В настоящее время основным сдерживающим фактором дальнейшей эксплуатации природных ресурсов становится их интенсивная истощаемость, вызываемая, в частности, неконтролируемыми изъятиями из популяций животных. Регулирование промысла должно основываться на решении задач оптимизации, в которых, помимо экономического требования максимизации доходов от эксплуатации, учитываются экологические требования, накладываемые на популяционную динамику: недопущение или минимизация вероятности снижения популяционной плотности ниже некоторого критического уровня, способного привести популяцию к исчезновению.

Решение задач оптимизации основывается на модельном описании динамики численности популяций и количественной оценке ее реакции на внешние воздействия (естественные и антропогенные). Моделированию динамики численности популяций посвящены сотни исследований. Общие вопросы управления промыслом эксплуатируемых популяций рассматриваются в [1 – 6].

Однако сложность динамики природных популяций, невозможность учета всех существующих связей и взаимодействий вынуждают при разработке моделей принимать ряд определенных допущений: пренебрегать возрастной структурой популяции, считать, что процесс размножения происходит синхронно у всех особей, игнорировать пространственное распределение особей и т.д. Для каждой конкретной задачи выбирается та степень идеализации природных процессов, которая в наибольшей степени отвечает возможностям и потребностям моделирования.

Одним из наиболее распространенных допущений при моделировании динамики численности природных популяций является предположение о постоянстве факторов внешней среды. Вместе с тем периодичность их изменения в биологии хорошо известна [7, 8]. Соответственно представляет интерес учет такой периодичности при решении задач оптимизации управления популяциями.

Постановка задачи

При значительном разнообразии моделей, используемых для описания динамики численности, в экологической литературе их принято делить на две группы: с жесткой состязательной (contest competition) и с нейтральной внутривидовой конкуренцией (scramble competition). К первой группе относятся модели типа функции Риккера [7]

$$x_{n+1} = \alpha x_n e^{-\beta x_n}, \qquad (1)$$

где x_n – численность участвующих в размножении особей; α – скорость роста популяции «в пустоту» при отсутствии лимитирования факторами внешней среды; β –степень имеющегося лимитирования. Данная модель является унимодальной зависимостью численности пополнения от численности родителей для популяций с дискретным процессом размножения и наличием жесткой плотностной конкуренции за лимитированные ресурсы, приводящей к выживанию лишь наиболее успешной части популяции, захватывающей свою, необходимую ей порцию ресурса, и к гибели оставшейся части конкурентов. Ранее было показано, что при данном виде зависимости оптимальная доля изъятия из популяции, обеспечивающая ее максимальный равновесный уровень, однозначно определяется параметром α [1].

В данной работе рассматривается задача оптимизации изъятия из локальной однородной промысловой популяции, динамика численности которой описывается моделью Риккера (1), при изменении параметра β в цикле длины два и три.

Зависимость промыслового изъятия от численности

Решение задачи оптимизации требует определения зависимости промыслового изъятия (y_n) от численности (x_n). Для популяций, подверженных промыслу, в результате которого часть особей изымается, а к размножению приступает оставшаяся часть ($z_n = x_n - y_n$), уравнение (1) может быть записано в виде

$$x_{n+1} = \alpha z_n e^{-\beta x_n}. \qquad (2)$$

Уменьшение численности популяции во время промысла происходит по определенным закономерностям, в основном определяемым его условиями и интенсивностью. Естественно считать, что скорость уменьшения пропорциональна численности

$$\frac{dx}{dt} = -\mu(x)x, \qquad (3)$$

где $\mu(x)$ − удельная скорость изъятия, определяемая интенсивностью промысла. Для многих эксплуатируемых популяций имеет место следующая зависимость интенсивности промысла от численности: концентрация усилий на добыче в периоды относительно большой численности и снижение усилия вплоть до полного отказа от промысла, когда численность популяции становится мала. Таким образом, можно считать, что $\mu(x) = \eta\, x$ и уравнение (3) преобразуется к виду

$$\frac{dx}{dt} = -\eta\, x^2. \tag{4}$$

Интегрируя (4) и учитывая, что $x(0)= x_n$ и $x(T) = z_n$, где T − время промысла, получаем:

$$z_n = \frac{x_n}{1 + Ax_n}, \tag{5}$$

где $A = \eta T$ − параметр, характеризующий интенсивность изъятия. Тогда величина промыслового изъятия из популяции определяется как:

$$y_n = x_n - z_n = \frac{Ax_n^2}{1 + Ax_n}. \tag{6}$$

Единственный параметр, определяющий величину дохода – интенсивность изъятия A. Решение задачи оптимизации заключается в нахождении такого его значения, которое обеспечит получение максимально возможной прибыли за бесконечный промежуток времени ($\lim_{n\to\infty}\sum y_n/n)\to$ max, т.е. при сохранении репродуктивного потенциала популяции. В частном случае стационарных численностей задача сводится к нахождению такого значения A, при котором достигается максимум выражения

$$\bar{y} = \frac{A\bar{x}^2}{1 + A\bar{x}}, \tag{7}$$

где $\bar{x}$ – нетривиальная стационарная точка уравнения динамики численности, получаемого подстановкой (5) в уравнение динамики численности (2):

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n}{1 + Ax_n} \exp\left\{-\beta \frac{x_n}{1 + Ax_n}\right\}. \tag{8}$$

Оптимизация промысла при изменении параметра β в цикле длины два

При изменении в цикле два параметр β принимает значения β_1, β_2, численность – соответственно u, v. Уравнения связей между численностями в смежные годы есть

$$v = \frac{\alpha u}{1 + Au} \exp\left\{-\frac{\beta_1 u}{1 + Au}\right\}, \tag{8a}$$

$$u = \frac{\alpha v}{1 + Av} \exp\left\{-\frac{\beta_2 v}{1 + Av}\right\}. \tag{8b}$$

Задача оптимизации сводится к оптимизации выражения, представляющего суммарное промысловое изъятие из популяции за один цикл

$$R = \frac{Au^2}{1+Au} + \frac{Av^2}{1+Av}, \tag{9a}$$

где *u, v* − стационарные значения численностей в последовательные годы (8a,8b). Не ограничивая общности рассмотрения, можно считать, что $\beta_1 < \beta_2$. Для уменьшения числа параметров перейдем к новым безразмеренным переменным: $\bar{\beta} = \beta_2/\beta_1$, $\bar{a} = A/\beta_1$, $\bar{u} = \beta_1 u$, $\bar{v} = \beta_1 v$ (далее крышки для краткости будем опускать). Заметим, что $\beta > 1$ и отражает интенсивность изменения (колебания) лимитирующих численность популяции факторов. Для новых переменных суммарное промысловое изъятие за один цикл будет определяться как:

$$R = \frac{au^2}{1+au} + \frac{av^2}{1+av}, \tag{9b}$$

где значения *u, v* должны удовлетворять уравнениям

$$\varphi_1 = v - \frac{au}{1+au}\exp\left\{-\frac{u}{1+au}\right\} = 0, \tag{10a}$$

$$\varphi_2 = u - \frac{av}{1+av}\exp\left\{-\frac{\beta v}{1+av}\right\} = 0. \tag{10b}$$

Рассматривается случай стационарной стратегии промысла, когда коэффициент интенсивности промысла является каждый год постоянной величиной. Оптимизация заключается в нахождении максимального по а значения R при *u* и *v,* определяемыми уравнениями (10a, 10b). Задача решалась методом множителей Лагранжа, а именно: путем нахождения максимума функции Лагранжа

$$L = R + \lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2, \tag{11}$$

считая *u* и *v* независимыми переменными. Дифференцируя *L* по *u, v, a*, исключив экспоненты при помощи (10a, 10b), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
&-(1+a-1)u)v\lambda_1 + au^2(2+au) + (1+au^2)u\lambda_2 = 0,\\
&av^2(2+av) + v(1+av)^2\lambda_1 - u(1+av-v\beta)\lambda_2 = 0,\\
&u^2 + 2au^2v + v^2 + 2auv^2 + 2a^2u^2v^2 +\\
&(1+(a-1)u)(1+av)^2uv\lambda_1 + (1+au)^2(1+av-v\beta)uv\lambda_2 = 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

После исключения множителей Лагранжа приходим к уравнению

$$\begin{aligned}
&v^3(a-\beta) + u^3(a+a^2v-1)(1+av-v\beta) +\\
&uv^2(2a^2v - 1 + v\beta - a(v+v\beta-1) +\\
&u^2v(a^3v^2 - a^2(v-2)v - \beta + a(1-2v(1+\beta))) = 0,
\end{aligned} \tag{13}$$

которое совместно с (10a, 10b) позволяет найти оптимальные коэффициенты интенсивности изъятия $a_{opt}(\beta)$, оптимальное изъятие $R_{opt}(\beta)$ и оптимальные доли изъятия $\delta_u = \alpha u/(1+au)$, $\delta_v = \alpha v/(1+av)$. Задача решалась численно. Результаты представлены на рис. 1, 2.

Увеличение параметра β приводит к монотонному линейному увеличению коэффициентов оптимальной интенсивности промысла a_{opt} вне зависимости от репродуктивной способности популяции (рис. 1).

Сразу отметим, что значение параметра α не влияет на характер рассматриваемых зависимостей, поэтому далее результаты представлены только для значения $\alpha = 10$.

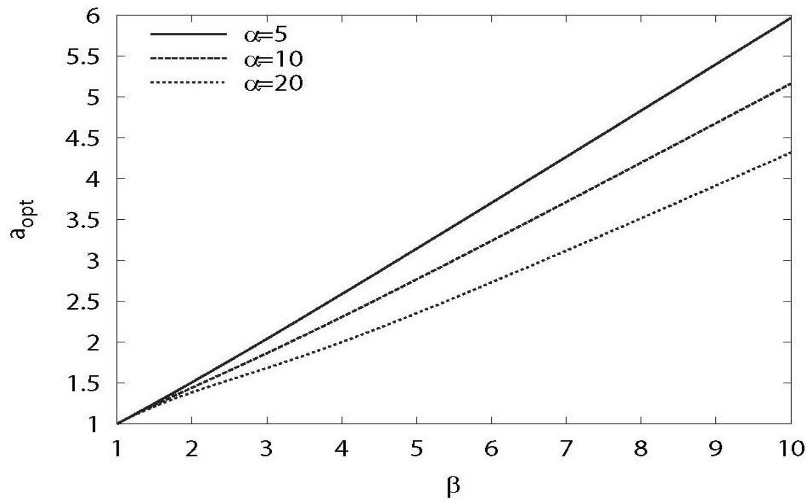

Рис. 1. Цикл длины два. Зависимость оптимальной интенсивности изъятия $a_{opt}(\beta)$.

Рост β приводит к уменьшению стационарных численностей, количественному различию оптимальных долей изъятия в последовательные годы и уменьшению оптимально возможного изъятия из популяции за один цикл (рис. 2). При этом наблюдается уменьшение оптимальных долей изъятия в годы с относительно меньшей численностью (10a) и увеличение в годы с относительно большей численностью, соответствующей меньшей интенсивности лимитирования факторами среды (10b).

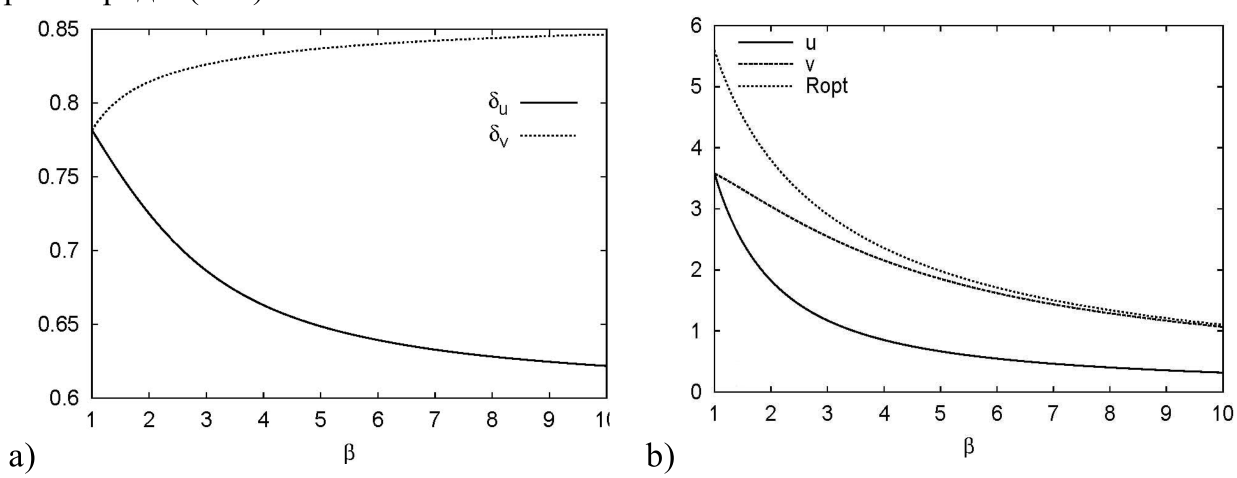

Рис. 2. Цикл длины два. Зависимость оптимальных долей изъятия $\delta_{opt}(\beta)$ стационарных численностей *u, v* и оптимального изъятия $R_{opt}(\beta)$.

Оптимизация промысла при изменении параметра β в цикле длины три

Для данного случая обозначим численность популяции в трех смежных годах через *u, v, w*. Уравнения, связывающие данные величины, будут иметь вид:

$$\phi_1 \equiv v - \frac{\alpha u}{1 + au} \exp\left\{- \frac{u}{1+au}\right\} = 0, \tag{14a}$$

$$\phi_2 \equiv w - \frac{\alpha v}{1+av}\exp\left\{-\frac{\beta_1 v}{1+av}\right\} = 0\,, \qquad (14b)$$

$$\phi_3 \equiv u - \frac{\alpha w}{1+aw}\exp\left\{-\frac{\beta_2 w}{1+aw}\right\} = 0\,. \qquad (14c)$$

Рассмотрение, как и для цикла длины два, проводится для безразмерных параметров. Соответственно суммарная величина изъятия за цикл определяется как:

$$R = \frac{\alpha u^2}{1+au} + \frac{\alpha v^2}{1+av} + \frac{\alpha w^2}{1+aw}\,. \qquad (15)$$

Требуется найти максимальное по параметру a значение R с учетом связей (14). Введем функцию Лагранжа

$$L = R + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\phi_2 + \lambda_3\phi_3\,. \qquad (16)$$

Искомое значение a, u, v, w и множители Лагранжа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ находятся из системы

$$\frac{dL}{da}=0;\quad \frac{dL}{du}=0;\quad \frac{dL}{dv}=0;\quad \frac{dL}{dw}=0,\quad \phi_1=0,\quad \varphi_2=0,\quad \phi_3=0. \qquad (17)$$

Развернутую запись (17) мы не приводим из-за ее громоздкости. Система уравнений, получающаяся из (17) после исключения множителей Лагранжа, решалась численными методами.

Зависимость оптимальных коэффициентов интенсивности изъятия a_{opt} и оптимального изъятия R_{opt} от $\beta_1 u \beta_2$ представлена на рис. 3 (область изменения параметра β ограничивалась областью $1 \le \beta \le 4$).

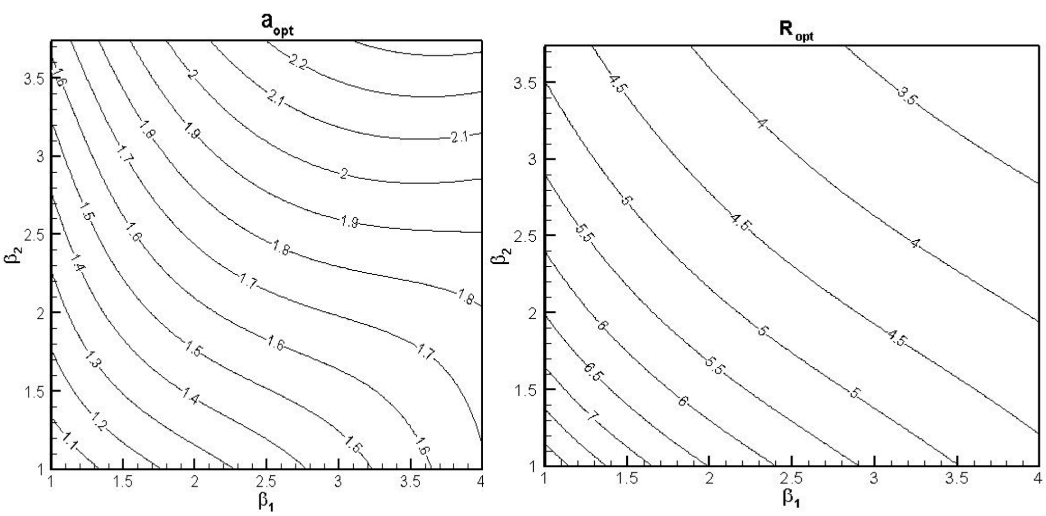

Рис. 3. Цикл длины три. Зависимость оптимальной интенсивности промысла $a_{opt}(\beta_1, \beta_2)$ и оптимального изъятия $R_{opt}(\beta_1, \beta_2)$.

Как и для цикла длины два, увеличение интенсивности колебаний факторов, лимитируюших рост численности, приводит к монотонному увеличению коэффициентов оптимальной интенсивности промысла a_{opt} и уменьшению оптимально возможного изъятия из популяции за цикл (R_{opt}).

Зависимости стационарных численностей и оптимальных долей изъятия от параметров β_1 β_2 представлены на рис. 4.

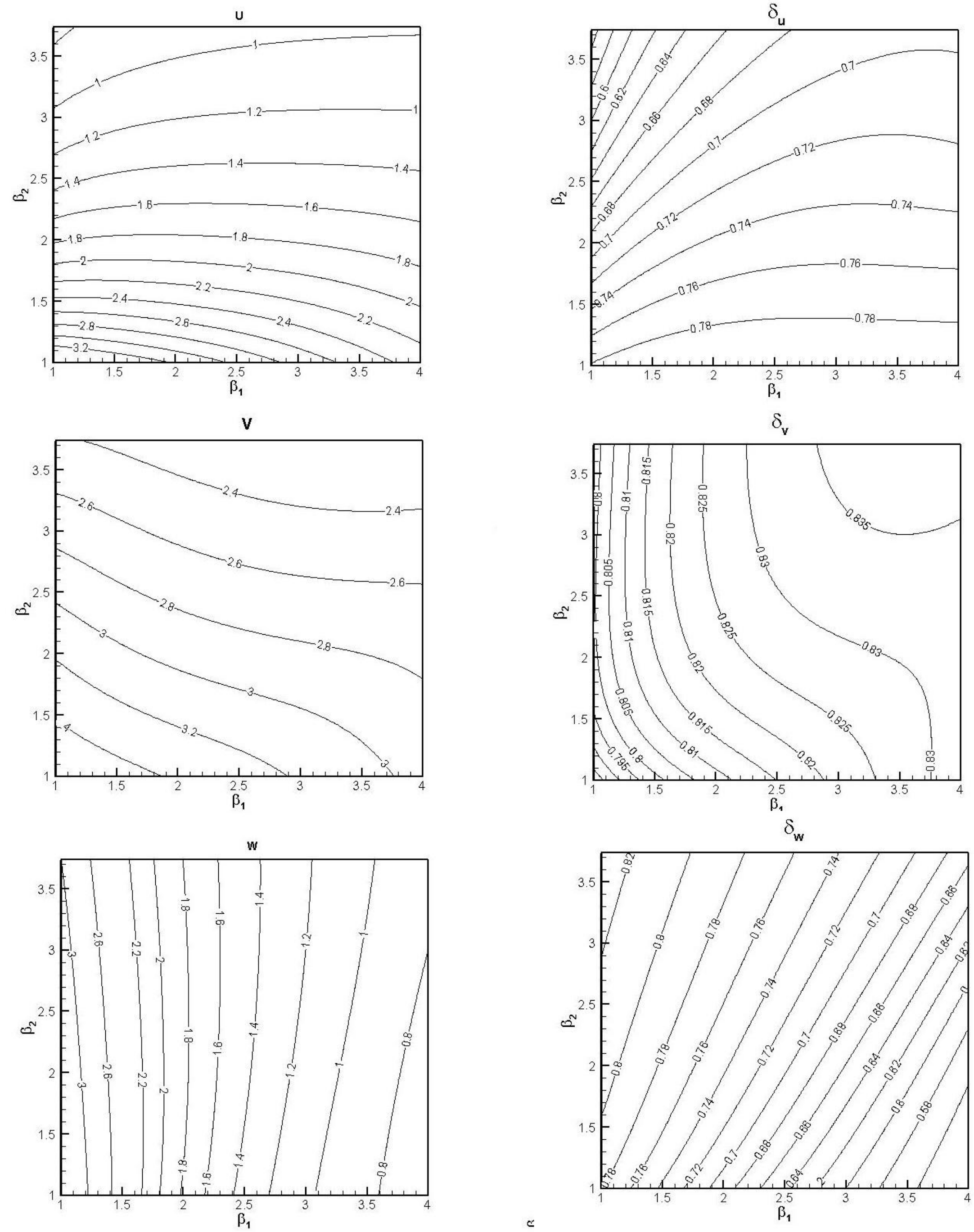

Рис. 4. Цикл длины три. Зависимость стационарных численностей *u, v, w* и оптимальных долей изъятия δ_u, δ_v, δ_w от параметров β_1 и β_2.

Как и для цикла длины два, увеличение интенсивности лимитирования численности приводит к снижению стационарных численностей во все последовательные годы цикла. Более сильная зависимость отмечается от параметра*,* определяющего лимитирование в данный год: увеличение β_1 приводит к более значительному снижению *w* (14b), а увеличение β_2 – к более значительному снижению *u* (14c).

При увеличении интенсивности лимитирования отмечается увеличение количественных различий между оптимальными долями изъятия в последовательные годы цикла. Для года, когда лимитирование численности минимально по сравнению с двумя другими годами цикла (14а), отмечается незначительное увеличение оптимальных долей изъятия (аналогично наблюдающемуся для δ_v при цикле длины два). Для двух других лет отмечается снижение оптимальных долей изъятия (аналогично снижению δ_u при цикле длины два).

Заключение

В данной статье решена задача оптимизации промысловых изъятий для популяций, динамика численности которых описывается риккеровской зависимостью при условии изменения лимитирующих рост численности факторов внешней среды в цикле длины два и три. Рассмотрен случай стационарной стратегии промысла, предусматривающей постоянство коэффициента интенсивности промысла в последовательные годы цикла.

Показано, что оптимизация промысла – получение максимально возможной прибыли за бесконечный промежуток времени (т.е. при сохранении репродуктивного потенциала популяции) – при увеличении интенсивности лимитирования численности обеспечивается количественным различием оптимальных долей изъятия в последовательные годы цикла и снижением общего изъятия из популяции за цикл при увеличении интенсивности промысла. Максимальная доля изъятия соответствует году, когда лимитирование численности минимально по сравнению с двумя другими годами цикла.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Скалецкая Е.И., Фрисман Е.Я., Шапиро А.П.* Дискретные модели динамики численности популяций и оптимизация промысла. – М.: Наука, 1979.
2. *Локшина И.Е.* Динамика промысла и оценка вылова. – М.: Пищ. промышленность, 1978.
3. *Абакумов А.И.* Управление и оптимизация в моделях эксплуатируемых популяций. – Владивосток: Дальнаука, 1993.
4. *Ласт Е.В., Фрисман Е.Я.* Влияние промысла на популяционную динамику проходных видов рыб // Прикл. нелинейная динамика. – 2002. – Т.10, №1-2. – С. 157-169.
5. *Фрисман Е.Я., Ласт Е.В.* Динамическая неустойчивость промысловых популяций с возрастной структурой (на примере лососевых видов рыб) // Доклады Академии наук. – 2004. – Т. 394, №4. – С. 569-573.
6. *Модельный* анализ и ожидаемые результаты оптимизации многовидовых промыслов прикамчатских вод / А.И. Абакумов, Л.Н. Бочаров, Е.П. Каредин, Т.М. Решетняк // Вопросы рыболовства. – 2007. – Т.8, № 1(29). – С. 93-109.
7. *Формозов А.Н.* Колебания численности промысловых животных. – М.;Л.: КОИЗ, 1935.
8. *Одум Ю.* Основы Экологии. – М: Мир, 1975.
9. *Рикер У.Е.* Методы оценки и интерпретации биологических показателей популяций рыб. –. М.: Пищ. промышленность, 1979.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Абакумовым.

E-mail:
Ашихмина Е.В. – ach@iacp.dvo.ru.