УДК 519.8

© 2009 г. **Д.В. Давыдов,** канд. физ.-мат. наук
(Дальневосточный государственный университет, Владивосток)

ИНТЕРВАЛЬНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ

В работе обсуждается подход к нахождению оценок экзогенных макроэкономических параметров долгосрочного экономического роста на основе интервальной модели идентификации.

Ключевые слова: интервальные модели, идентификация, макроэкономический рост.

Введение

В современной литературе известно большое количество разнообразных постановок задач идентификации в моделях управляемых систем, в том числе достаточное внимание уделено задачам идентификации в условиях стохастической неопределенности [1 – 3]. Однако при скудости статистических данных о распределениях параметров управляемой системы детерминированные и стохастические методы находят ограниченное применение.

Здесь мы рассматриваем дискретную задачу идентификации параметров макроэкономической системы. Предлагается двухэтапное ее решение. На первом этапе строится эконометрическая модель, использующая реальные экономические показатели и позволяющая сформировать динамическую интервальную систему, ориентированную на средние общемировые тенденции экономического развития. На втором этапе на основе интервальной системы строится алгоритм идентификации экзогенных макроэкономических параметров, специфичных по своим значениям для каждой рассматриваемой страны.

Долгосрочное развитие и параметры экономического роста

Под экономическим ростом обычно понимают увеличение реального дохода в экономике, а также рост реального выпуска в расчете на душу населения или на одного занятого. Для измерения экономического роста используются показатели абсолютного прироста или темпов прироста реального объема выпуска в целом или на душу населения [4, 5].

Экономический рост в зависимости от степени воздействия на благосостояние общества разделяют на экстенсивный, если он осуществляется за счет привлечения дополнительных ресурсов, и интенсивный, связанный с применением более совершенных факторов производства и технологий. В самом общем случае экономический рост означает как изменение результатов производства, так и улучшение производительности его факторов.

Факторы экономического роста часто группируют в соответствии с типами экономического роста. К экстенсивным факторам относят рост затрат капитала и труда (в некоторых случаях выделяются земля или природные ресурсы), к интенсивным – технологический прогресс, экономию на масштабах, рост образовательного и профессионального уровня работников, повышение мобильности и улучшение распределения ресурсов, совершенствование управления производством, соответствующее улучшение законодательства, т.е. все, что позволяет качественно усовершенствовать как сами факторы производства, так и процесс их использования. В качестве причин, сдерживающих экономический рост, часто называют ресурсные и экологические ограничения, широкий спектр социальных издержек, связанных с ростом производства, а также неэффективную экономическую политику правительства.

Таким образом, простейшая модель, отражающая долгосрочное развитие экономики отдельной страны либо общемировые тенденции макроэкономического (глобального) роста, должна опираться на три базовые переменные – выпуск, капитал, труд, и содержать достаточное количество параметров, обеспечивающих корректное описание интенсивной части экономического роста.

Отметим, что различия в долгосрочной динамике основных макроэкономических параметров в разных странах обусловлены разными «начальными условиями» и экзогенными параметрами. Одним из важных вопросов является идентификация таких параметров, позволяющая, с одной стороны, объяснить различные результаты применения одной и той же макроэкономической политики в разных странах, а с другой стороны, – получить более точные рекомендации для выработки наиболее подходящей политики для каждой конкретной страны.

Постановка задачи идентификации

Рассмотрим динамику взаимосвязи основных макроэкономических показателей в долгосрочном периоде. Учитывая нестационарность, связанную с наличием долгосрочного положительного тренда, в основу модели положим изучение динамики приростов основных макроэкономических показателей.

Пусть k_t – прирост капитала, l_t – прирост уровня занятости, y_t – прирост уровня валового выпуска в экономике в период t. Предположим, что верна система взаимосвязей

$$\begin{cases} y_{t+1} - y_t = a_{11} y_t + a_{12} k_t + a_{13} l_t, \\ k_{t+1} - k_t = a_{21} y_t + a_{22} k_t, \\ l_{t+1} - l_t = a_{33} l_t. \end{cases} \tag{1}$$

В соответствии с неоклассическим макроэкономическим описанием первое уравнение системы можно интерпретировать как производственную функцию Кобба-Дугласа с нейтральным научно-техническим прогрессом, заданную в логарифмической форме. Слагаемое $a_{11} y_t$ отражает вклад научно-технического прогресса в виде доли прироста выпуска текущего периода в изменении прироста следующего периода [6].

Второе уравнение системы задает способ формализации влияния прироста выпуска и используемого капитала в текущем периоде на прирост капитала в следующем периоде. Первая часть уравнения отражает так называемый эффект акселератора, поэтому коэффициент a_{21} можно интерпретировать как приростную капиталоемкость продукции. Коэффициент a_{22} имеет смысл чистого эффекта изменения уровня амортизации капитала [5].

Третье уравнение системы отражает предположение, что изменение уровня занятости в экономике в текущем периоде определяется уровнем занятости предыдущего периода.

Преобразуем систему (1) к рекуррентному виду

$$\begin{cases} y_{t+1} = (1+a_{11})y_t + a_{12}k_t + a_{13}l_t, \\ k_{t+1} = a_{21}y_t + (1+a_{22})k_t, \\ l_{t+1} = (1+a_{33})l_t \end{cases} \tag{2}$$

и выделим матрицу коэффициентов

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1+a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 1+a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1+a_{33} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Элементы матрицы (3) могут быть оценены эконометрическими методами на основе общемировой статистики по приростам ВВП, занятости, и, например, рыночной капитализации акционерных компаний как *proxi* для динамики изменения капитала.

В силу неточности оценивания, присущего статистическим эконометрическим методам, значения коэффициентов матрицы A_0 можно предполагать интервальными, задавая относительные погрешности оценок коэффициентов.

Введем вектор состояния $x^t = (y_t, k_t, l_t)'$ в моменты времени $t = 0,1, \ldots, T$ и вектор параметров $w = (w_1, w_2, w_3)'$. Здесь и далее ' (штрих) обозначает операцию транспонирования.

Будем интерпретировать вектор параметров w как набор индивидуальных характеристик страны по сравнению со «средней динамикой», характерной для общемирового экономического развития. Компонента w_1 отражает специфику научно-технического прогресса; компонента w_2 связывается с условиями создания и эксплуатации капитала и, в частности, отражает влияние природных и климатических условий; компонента w_3 характеризует трудовой фактор, или, в более общей интерпретации, «менталитет». В среднесрочной перспективе параметр w_3 отражает склонность населения страны к "трудоголизму", в долгосрочном периоде характеризует общие демографические тенденции. Если идентифицировать перечисленные параметры модели – компоненты вектора w, – то для экономики отдельно взятой страны можно выделить вклад экзогенных по отношению к макроэкономической системе факторов в общую динамику экономических показателей, выраженных фазовыми векторами x^t, $t = 0,1,\ldots,T$.

Построим интервальную систему

$$x^{t+1} = Ax^t + w \qquad (4)$$

с неизвестной матрицей A, лежащей в замкнутом интервале $\mathbf{A} = [A_0 - A_\Delta, A_0 + A_\Delta]$. Здесь центр A_0 интервальной матрицы $\mathbf{A}$ определен формулой (3), радиус A_Δ выбирается на основании прогноза ошибок по результатам эконометрического оценивания или фиксированием относительной погрешности δ_A максимального отклонения значений элементов матрицы A от соответствующих элементов центральной матрицы A_0 (часто в размере 5% или 10%).

Отметим, что аддитивная форма представления модели по вектору идентифицируемых параметров сформулирована в терминах приростов, что означает мультипликативный характер их влияния на номинальные значения макроэкономических переменных.

Предположим, что значения вектора $x^t = (y_t, k_t, l_t)'$ не могут быть известны точно в силу погрешностей статистического учета, однако нам доступен вектор наблюдений z^t, отвечающий интервальной системе

$$z^t = Cx^t,\ t = 0,1,\ldots,T, \qquad (5)$$

с матрицей C из интервала $\mathbf{C} = [C_0 - C_\Delta, C_0 + C_\Delta]$.

Фактически вектор наблюдений определяется неточно известными линейными комбинациями вектора состояний x^t. В простейшем случае матрица наблюдения выбирается специальным образом из интервала $[1-\delta_C, 1+\delta_C]I$, где δ_C – относительная погрешность статистической обработки данных – компонент вектора x^t; I – 3x3 – единичная матрица.

Таким образом, формулы (4), (5) совместно с интервально определенными матрицами состояния и наблюдения $A \in \mathbf{A}, C \in \mathbf{C}$ формируют интервальную дискретную систему с наблюдением фазового состояния.

Задача заключается в нахождении оценки вектора параметров w при известных наблюдениях $z^0, z^1, \ldots, z^T$ (T – длительность периода наблюдения) и интервально заданных матрицах состояния и наблюдения $A \in \mathbf{A}, C \in \mathbf{C}$.

Решение интервальной задачи идентификации

Зафиксируем неизвестные матрицы $A \in \mathbf{A}, C \in \mathbf{C}$. Воспроизведем рекурсивно соотношения (4) и подставим их в систему наблюдения (5):

$$x^1 = Ax^0 + w,\ x^2 = A^2x^0 + (A+I)w,\ \ldots,\ x^t = A^tx^0 + \left(A^{t-1} + A^{t-2} + \ldots + I\right)w, \qquad (6)$$

откуда

$$z^t = CA^tx^0 + C\left(A^{t-1} + A^{t-2} + \ldots + I\right)w,\ t = 1,\ldots,T. \qquad (7)$$

Предположим временно, что начальное состояние x^0 известно точно. Построим интервальную систему уравнений относительно вектора w идентифицируемых параметров. Для этого преобразуем (7) к виду:

$$C\left(A^{t-1}+A^{t-2}+\ldots+I\right)w=z^{t}-CA^{t}x^{0},\ t=1,\ldots,T. \tag{8}$$

Вычитая последовательно равенства (8), получим

$$CA^{t-1}w=z^{t}-z^{t-1}+C\left(A^{t-1}-A^{t}\right)x^{0}, t=2,\ldots,T,$$

или в компактной форме

$$Vw=g. \tag{9}$$

Здесь

$$V=\begin{pmatrix} CA^{t-1} \\ CA^{t-2} \\ \ldots \\ C \end{pmatrix}, \qquad g=\begin{pmatrix} z^{T}-z^{T-1}+C\left(A^{T-1}-A^{T}\right)x^{0} \\ z^{T-1}-z^{T-2}+C\left(A^{T-2}-A^{T-1}\right)x^{0} \\ \ldots \\ z^{1}-CAx^{0} \end{pmatrix}$$

блочные соответственно ($3T$ x 3)-матрица и ($3T$ x 1)-вектор с неопределенными коэффициентами, зависящими от реализаций матриц $A\in\mathbf{A},C\in\mathbf{C}$ в своих интервалах.

Используя стандартную технику [7], нетрудно получить внешние интервальные оценки матрицы V и вектора g в виде

$$\left|V-V_{0}\right|\le V_{\Delta},\ \left|g-g_{0}\right|\le g_{\Delta}, \tag{10}$$

где матрицы V_{0},V_{Δ}, векторы g_{0},g_{Δ} строятся по известным матрицам A_{0},A_{Δ}, C_{0},C_{Δ} и наблюдениям $z^{0}=x^{0},z^{1},\ldots,z^{T}$. С учетом оценки (10) систему линейных алгебраических уравнений (9) можно для упрощения считать интервальной.

Заметим, что для получения оценки вектора w можно решать и непосредственно систему (8) (одновременно при всех $\tau=1,\ldots,T$), однако точность внешней интервальной оценки матрицы и правой части блочной системы (8) очевидно ниже, чем для преобразованной системы (9).

Среди известных [7-10] определений решения интервальной системы (9), (10) наиболее подходящим для построения оценки вектора параметров w является универсальное решение [7, 10], отвечающее минимальной невязке равенства (9) при всех допустимых V, g из (10), или субуниверсальное решение, отвечающее центральной системе

$$V_{0}w=g_{0} \tag{11}$$

и близкое по норме [7] универсальному решению.

Отметим, что в условиях интервальной неопределенности рост числа наблюдений служит уточняющим фактором в получении оценки w. Кроме того, если начальное состояние x^{0} недоступно, можно провести одновременную идентификацию векторов x^{0}, w.

Остановимся подробнее на технике получения универсального решения.

По аналогии с [7] введем в рассмотрение неотрицательный вектор ε, характеризующий точность выполнения равенства (9). Назовем вектор w ε-решением уравнения (9), если неравенства

$$-\varepsilon\le Vw-g\le\varepsilon \tag{12}$$

выполняются для любых пар V,g, удовлетворяющих (10). За универсальное решение w^* уравнения (9) примем ε-решение с минимальным в некоторой нормировке вектором ε. Отвечающий универсальному решению вектор ε^* назовем минимальной невязкой уравнения (9). По определению пара (w^*, ε^*) удовлетворяет неравенству $|Vw^* - g| \le \varepsilon^*$ для всех V, g, отвечающих (9), и среди всех пар $\widetilde{w}, \widetilde{\varepsilon}$ с тем же свойством выделяется условием $\|\varepsilon^*\| \le \|\widetilde{\varepsilon}\|$.

Определим норму $\|\varepsilon\|$ неотрицательного вектора ε как сумму его координат. Тогда поиск универсальных решений сводится к задаче нелинейного программирования

$$e'\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \to \min_{v,\varepsilon}, \tag{13}$$

$$V_0 w + V_\Delta |w| - \varepsilon \le g_0 - g_\Delta,\ -V_0 w + V_\Delta |w| - \varepsilon \le -g_0 - g_\Delta,\ \varepsilon \ge 0,$$

где w, ε – неизвестные; e – вектор с единичными координатами.

Задача (13) определенным образом связана с задачей линейного программирования

$$e'\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \to \min_{v,\varepsilon}, \tag{14}$$

$$V_0 w + V_\Delta s - \varepsilon \le g_0 - g_\Delta,\ -V_0 w + V_\Delta s - \varepsilon \le -g_0 - g_\Delta,\ -s \le w \le s,\ \varepsilon \ge 0.$$

Здесь s – вектор вспомогательных переменных.

Следуя [7], можно показать, что задача линейного программирования (14) разрешима, и если $(w^*, \varepsilon^*, s^*)$ – ее оптимальный план, то w^* – универсальное решение, а ε^* – минимальная невязка уравнения (9). Таким образом, решение задачи линейного программирования (14) определяет оценку w^* идентифицируемого параметра w и гарантирует выполнение (9) с точностью $|Vw^* - g| \le \varepsilon^*$.

В ряде случаев вместо универсального решения уравнения (9) удобнее использовать более грубое, но легче находимое субуниверсальное решение.

Рассмотрим интервальное уравнение (9) в предположении максимальности ранга матрицы V_0, отвечающей центральной системе (11). Учитывая, что каждое ε-решение w уравнения (9) и только оно образует план (w, ε) задачи (13), сложим первые два неравенства (13) и найдем нижнюю оценку невязки

$$\varepsilon \ge \varepsilon(w) \equiv V_\Delta |w| + g_\Delta.$$

В силу (13) планы $(w, \varepsilon(w))$ удовлетворяют уравнению (11). Верно и обратное: каждое решение w уравнения (11) вместе с вектором $\varepsilon \ge \varepsilon(w)$ есть план задачи (13). Определим субуниверсальное решение $\widetilde{w}$ интервальной системы (9), (10) как решение $\widetilde{w} = V_0^{+} g_0$ системы уравнений (11). Здесь $V_0^{+} = V_0'(V_0 V_0')^{-1}$ – псевдообратная матрица [11]. Легко получить оценку невязки уравнения (9) на субуниверсальном решении $\widetilde{w}$:

$$\widetilde{\varepsilon} = |V\widetilde{w} - g| = |V\widetilde{w} - g - (V_0\widetilde{w} - g_0)| \le |V - V_0||\widetilde{w}| + |g - g_0| \le V_\Delta |\widetilde{w}| + g_\Delta = \varepsilon(\widetilde{w})$$

для любых допустимых матриц $A \in \mathbf{A}, C \in \mathbf{C}$.

Невязка $\varepsilon(\widetilde{w})$ покоординатно уменьшается с уменьшением норм матриц

A_Δ, C_Δ и в пределе (при $A_\Delta = 0, C_\Delta = 0$) становится нулевой. В этом случае субуниверсальное решение совпадает с решением детерминированной системы идентификации (4), (5) при $A = A_0, C = C_0$.

Одновременная идентификация начального состояния

Пусть теперь помимо вектора параметров w, неизвестно и начальное состояние x^0 системы (4), (5).

Введем блочные матрицы $D_\tau = \left(CA^\tau, \quad CA^{\tau-1} + \ldots + CA + C\right), \quad \tau = 1,\ldots,T$ и блочные (6 x 1)- и (3T x 1)- векторы $v = (x^0, w)'$, $z = (z^1,\ldots,z^T)'$. Построим (3T x 6)-матрицу

$$D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \ldots \\ D_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CA & C \\ CA^2 & CA + C \\ \ldots & \ldots \\ CA^T & CA^{T-1} + \ldots + CA + C \end{pmatrix}.$$

Тогда система (7) с неизвестными векторами x^0, w может быть представлена в виде

$$Dv = z. \qquad (15)$$

Нетрудно получить внешние интервальные оценки матрицы D; вектор z правой части (15), составленный из известных результатов наблюдения, является детерминированным.

Аналогичные предыдущему пункту рассуждения позволяют построить универсальное v^* и субуниверсальное $\tilde{v}$ решения системы (15), компоненты которых одновременно определяют оценки $\tilde{x}^0$, $\tilde{w}$ начального состояния и вектора параметров интервальной системы (4), (5).

Пример идентификации

В качестве простого модельного примера рассмотрена идентификация долгосрочных макроэкономических параметров пяти развитых экономик, включая Австралию, Великобританию, США, Японию и объединенную Европу. Результаты эконометрического анализа статистических данных по валовому выпуску, занятости и рыночной капитализации за период 2000 – 2005 гг. позволили сформировать матрицу состояния

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1.22 & -0.1 & -0.22 \\ -0.25 & 1.85 & 0 \\ 0 & 0 & 1.85 \end{pmatrix}.$$

Принимая погрешность определения коэффициентов матриц состояния и наблюдения равными $\delta_A = \delta_C = 0.05$, нетрудно получить интервальные оценки (10) и построить универсальное и субуниверсальное решения на основе задачи линейного программирования (14) и линейной алгебраической системы (11) для каждой из рассматриваемых стран. Результаты оценивания параметров приведены в таблице.

	Австралия	Великобритания	США	Япония	Объединенная Европа
Вектор параметров	-0,022 -0,008 0,010	0,038 0,009 0,005	0,095 0,095 -0,044	0,120 0,027 0,020	-0,064 -0,039 0,029
Вектор экспонент координат	0,98 0,99 1,01	1,04 1,01 1,01	1,01 1,01 0,96	1,12 1,12 1,02	0,94 0,96 1,03
Невязка	0,042 0,067 0,032	0,061 0,052 0,019	0,162 0,327 0,113	0,180 0,100 0,060	0,103 0,129 0,077

Для оценки мультипликативного влияния на номинальные значения макроэкономических переменных в качестве приближения удобно рассматривать экспоненты координат вектора параметров w. Таким образом, полученные данные обретают привычную экономическую интерпретацию. Например, экспонента коэффициента нейтрального технического прогресса по полученным расчетам принимает максимальное значение 1.12 для экономики Японии (вклад прогресса в рост ВВП в размере 12% в год) и минимальное значение – для единой европейской экономики. Напротив, экономика объединенной Европы имеет максимальное положительное влияние трудового фактора (порядка 3% в год, по-видимому, вследствие активного миграционного баланса, притока трудовых ресурсов) в отличие от экономики США, где максимальное падение влияния трудового фактора в 4% в год предположительно связано с активным перемещением промышленного производства из США в страны Юго-Восточной Азии.

Заключение

В данной работе рассмотрена технология идентификации экзогенных параметров макроэкономической системы, основанная на эконометрическом анализе статистических данных и построении дискретной интервальной системы с уравнением наблюдения.

Стоит отметить, что предложенный алгоритм идентификации может быть применен не только к анализу макроэкономических систем, но и к любой содержательной постановке модели, приводящей к интервальной системе с наблюдениями вида (4), (5). Выделенные в работе универсальное и субуниверсальное решения позволяют гарантировать минимальные или близкие к минимальным отклонения вектора идентифицируемых параметров при всех допустимых изменениях матриц состояния и наблюдения в своих интервальных границах.

Автор выражает благодарность Г.С. Макаренко за помощь в проведении численных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Эйкхофф П.* Основы идентификации систем управления. – М.: Мир, 1975.
2. *Сейдж Э.П., Мелса Дж.Л.* Идентификация систем управления. – М.: Мир, 1974.
3. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. – М.: Едиториал УРСС, 2004.

4. *Сакс Дж. Д., Ларрен Ф.Б.* Макроэкономика: глобальный подход / пер. с англ. – М.: Дело, 1999.
5. Тарасевич Л.С., Гребенников П.И., Леусский А.И. Макроэкономика. – М.: Высшее образование, 2006.
6. *Колемаев В.А.* Математическая экономика. – М.: ЮНИТИ, 2005.
7. *Ащепков Л.Т., Давыдов Д.В.* Универсальные решения интервальных задач оптимизации и управления. – М.: Наука, 2006.
8. *Вощинин А.П., Сотиров Г.Р.* Оптимизация в условиях неопределенности. – Москва; София: Изд-во МЭИ (СССР); «Техника» (НРБ), 1989.
9. *Шарый С.П.* Интервальные алгебраические задачи и их численное решение: дис. … д-ра физ.-мат. наук. – Новосибирск : ИВТ СО РАН, 2000.
10. *Aschepkov L.T., Dolgy D.V.* The universal solutions of interval systems of linear algebraic equations. // International Journal of Software Engineering and Knowledge Engineering. – 1993. – V.3, № 4. – P.477-485.
11. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Т. Ащепковым.

E-mail:
Давыдов Д.В. – ddavydov_77@yahoo.com.

УДК 658.562:519.24

 А.Г. Ивахненко, д-р техн. наук,
М.Л. Сторублев
(Курский государственный технический университет)

ПРИМЕНЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ МЕТОДОВ В УПРАВЛЕНИИ ПРОЦЕССАМИ СИСТЕМЫ МЕНЕДЖМЕНТА КАЧЕСТВА

Показана функциональная связь критериев результативности сети процессов системы менеджмента качества. Для построения математической модели сети процессов использованы положения теории информации. Получена количественная оценка взаимодействия процессов системы менеджмента качества.
***Ключевые слова*:** система менеджмента качества, управление, сеть процессов, теория информации, энтропия.

Введение

В настоящее время в управлении предприятиями и организациями все большее применение находит процессный подход, входящий в число восьми основополагающих принципов стандартов ИСО серии 9000:2000 [3]. Данный принцип неразрывно связан с остальными семью принципами менеджмента качества, но в большей степени прослеживается взаимосвязь с принципом применения системного подхода к менеджменту. В соответствии с этим принципом система ка-