



УДК 681.51

© 2012 г. **В.П. Кривошеев**, д-р техн. наук,  
**А.В. Епифанцев**,  
**Б.А. Кан**

(Владивостокский государственный университет экономики и сервиса)

## **МЕТОД ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СИНТЕЗА ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ РАСШИРЕННЫХ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК**

В работе решается задача расчета параметров цифрового ПИ-регулятора, обеспечивающего минимальное значение квадратичной интегральной оценки при заданной степени колебательности. Параметры цифрового ПИ-регулятора находятся методом одномерного поиска на линии Д-разбиения, полученной при помощи расширенной амплитудно-фазовой характеристики (АФХ) разомкнутой системы.

**Ключевые слова:** цифровые системы управления, параметрический синтез, ПИ-регулятор, амплитудно-фазовые характеристики (АФХ), Д-разбиение, переходной процесс.

### **Введение**

Возрастание требований к качеству работы автоматических систем регулирования (АСР), увеличение объема перерабатываемой информации, усложнение объектов управления привели к тому, что средствами аналоговой техники и непрерывной автоматики нельзя решить многие практические задачи. В результате стали широко применяться цифровые АСР [1 – 6], в состав которых входят ЦВМ или специализированные цифровые устройства. Благодаря цифровым АСР возможно использовать более сложные алгоритмы обработки сигналов и более точно реализовывать эти алгоритмы.

Одной из основных задач параметрического синтеза цифровых АСР является определение оптимальных настроечных параметров цифрового регулятора. В известных работах по параметрическому синтезу цифровых АСР [1, 2] рассматриваются аналитический метод определения настроечных параметров цифровых регуляторов для объектов невысокого порядка без чистого запаздывания, градиентные или комбинированные методы для общего случая. При этом отмечается [1], что для оценки качества управления удобно использовать какой-либо единственный показатель. В качестве такого показателя в работах [1, 2] рассматривается квадратичный критерий качества вида

$$S_{eu}^2 = \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^M (e^2(k) + r \Delta u^2(k)), \quad (1)$$

где  $e(k)$  – ошибка управления;  $\Delta u(k)$  – отклонение управляющего воздействия от его установившегося значения;  $r$  – весовой коэффициент. При параметрическом синтезе определяются значения настроечных параметров, минимизирующих выражение (1). Известны работы [7, 8], в которых ставится задача обеспечить заданное значение коэффициента усиления разомкнутой цифровой системы. В [8] эта задача решается методом корневого годографа [9].

Следует отметить, что при минимизации критерия (1) нужно решить задачу оптимизации с размерностью, равной числу искомым настроечных параметров. В зависимости от сложности объекта управления трудности могут возникнуть даже при решении двумерной задачи.

Применение метода корневого годографа осложняется при параметрическом синтезе систем управления объектами, имеющими значительное чистое запаздывание.

При управлении энергетическими объектами [10], а также химико-технологическими объектами [11] широко распространена постановка задачи параметрического синтеза в виде:

$$\sum_{k=0}^M (e_k^2(q) \rightarrow \min_q, \quad (2)$$

$$m = m_z, \quad (3)$$

где  $q$  – вектор настроечных параметров регулятора;  $k$  – индекс, соответствующий моменту времени  $t_k = k\Delta t$ ;  $m$  – степень колебательности;  $z$  – для заданных значений.

Отметим, что в [10, 11] такая задача решена для аналоговых АСР.

### Постановка задачи

Разработать частотный метод расчета оптимальных значений настроечных параметров цифрового регулятора в одноконтурной системе управления в соответствии с (2) и (3) на основе расширенных амплитудно-фазовых характеристик.

В ходе работы: выводятся формулы для построения линии Д-разбиения на основе расширенной АФХ разомкнутой цифровой системы; строятся линии Д-разбиения; отыскиваются оптимальные настроечные параметры цифрового ПИ-регулятора на линии Д-разбиения; сравниваются переходные процессы в одноконтурных аналоговой и цифровой АСР.

### Д-разбиение в аналоговых АСР

Метод Д-разбиения используется для определения оптимальных значений настроечных параметров аналоговых регуляторов при заданном условии. Суть метода Д-разбиения состоит в том, что в плоскости настроечных параметров регулятора строится для определенного диапазона частот линия, в каждой точке которой система обеспечивает заданное требование по распределению корней ха-

рактического уравнения, в частности, например, заданную степень колебательности [10, 11].

Линия Д-разбиения строится на основе расширенной АФХ разомкнутой системы. Для построения расширенной АФХ в передаточной функции разомкнутой системы выполняется замена:

$$s = -m\omega + j\omega, \quad (4)$$

где  $m$  – требуемая степень колебательности;  $\omega$  – круговая частота;  $j$  – мнимая единица.

Рассмотрим аналоговую одноконтурную АСР с передаточной функцией объекта управления  $W_o(s)$  и передаточной функцией регулятора  $W_r(s, c_0, c_1)$ .

Заданная степень колебательности обеспечивается при выполнении следующего условия:

$$W_o(m, \omega) \cdot W_r(m, \omega, c_0, c_1) = -1, \quad (5)$$

где частота  $\omega$  входит в заданный диапазон частот  $[\omega_n; \omega_k]$ .

Для ПИ-регулятора условие (2) имеет вид:

$$c_1 W_o(m, \omega) + \frac{c_0 W_o(m, \omega)}{-m\omega + j\omega} + 1 = 0. \quad (6)$$

Введем следующие обозначения:

$$W_o(m, \omega) = V(m, \omega); \quad (7)$$

$$\frac{W_o(m, \omega)}{-m\omega + j\omega} = X(m, \omega). \quad (8)$$

Введем  $X_1(m, \omega)$ ,  $X_2(m, \omega)$ ,  $V_1(m, \omega)$ ,  $V_2(m, \omega)$  – такие что:

$$V(m, \omega) = V_1(m, \omega) + jV_2(m, \omega); \quad (9)$$

$$X(m, \omega) = \frac{V_1(m, \omega) + jV_2(m, \omega)}{-m\omega + j\omega} = X_1(m, \omega) + jX_2(m, \omega). \quad (10)$$

Тогда условие (6) будет иметь вид:

$$c_1 V_1(m, \omega) + c_0 X_1(m, \omega) + j [c_1 V_2(m, \omega) + c_0 X_2(m, \omega)] = -1. \quad (11)$$

Отсюда следует, что:

$$\begin{cases} c_1 V_1(m, \omega) + c_0 X_1(m, \omega) = -1, \\ c_1 V_2(m, \omega) + c_0 X_2(m, \omega) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

По полученным из (12) точкам  $(c_0, c_1)$  строится линия Д-разбиения для заданного диапазона частот  $[\omega_n; \omega_k]$ . Движением по линии Д-разбиения находят частоту  $\omega^{opt}$ , обеспечивающую выполнение (2). Оптимальные настроечные параметры регулятора есть настройки, вычисленные из (12) при частоте  $\omega^{opt}$ .

Для системы с ПД-регулятором  $R(s) = c_1 + c_2 s$  условие (2) принимает вид:

$$c_1 W_2(m, \omega) + c_2 (-m\omega + j\omega) W_y(m, \omega) + 1 = 0. \quad (13)$$

Введем обозначение:

$$V(m, \omega) = W_y(m, \omega)(-m\omega + j\omega) = V_1(m, \omega) + jV_2(m, \omega). \quad (14)$$

Условие (13) в этом случае принимает вид:

$$c_1 V_1(m, \omega) + c_2 V_2(m, \omega) + j(c_1 V_2(m, \omega) + c_2 V_2(m, \omega)) = -1. \quad (15)$$

Отсюда следует, что:

$$c_1 V_1(m, \omega) + c_2 V_2(m, \omega) = -1; \quad (16)$$

$$c_1 V_2(m, \omega) + c_2 Y_2(m, \omega) = 0. \quad (17)$$

По полученным из (16) и (17) точкам  $(c_1, c_2)$  строим линию Д-разбиения для заданного диапазона частот  $[\omega_n; \omega_k]$ . Как и в случае с ПИ-регулятором, движением по линии Д-разбиения находят частоту  $\omega^{opt}$ , обеспечивающую выполнение условия (2). Оптимальные настроечные параметры регулятора есть настройки, вычисленные из (16) и (17), при  $\omega^{opt}$ .

### Построение линии Д-разбиения для цифрового ПИ-регулятора

Возьмем одноконтурную цифровую АСР, состоящую из объекта управления с передаточной функцией  $W_o(z)$  и ПИ-регулятора с передаточной функцией  $R(z, q_0, q_1) = (q_0 - q_1 z^{-1}) / (1 - z^{-1})$ .

Выполним z-преобразование передаточной функции объекта управления и получим передаточную функцию разомкнутой системы:

$$W_{p.c.}(z) = W_o(z) R(z, q_0, q_1). \quad (18)$$

Выполним билинейное преобразование [4]:

$$z = \frac{1+w}{1-w}, \quad (19)$$

$$w = jv, \quad (20)$$

где  $v$  – псевдочастота,

$$v = \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}; \quad (21)$$

$\omega$  – круговая частота;  $T$  – шаг квантования по времени.

АФХ разомкнутой цифровой системы:

$$W_{pc}(z) \Big|_{z = \frac{1+w}{1-w}} = \operatorname{Re}(q_0, q_1, v) + j \operatorname{Im}(q_0, q_1, v). \quad (22)$$

Условие положения системы на границе устойчивости имеет вид:

$$W_{pc}(z) \Big|_{z = \frac{1+w}{1-w}} = -1. \quad (23)$$

Это соответствует отображению границы устойчивости  $w = jv$  в комплексную плоскость  $W_{pc}(z) \Big|_{z = \frac{1+w}{1-w}}$ .

Для обеспечения заданной степени колебательности должно выполняться условие (23) при

$$w = -mv + jv, \quad (24)$$

где  $m$  – требуемая степень колебательности.

Таким образом:

$$W_{pc}(z) \Big|_{z = \frac{1+w}{1-w}} = \operatorname{Re}(q_0, q_1, m, v) + j \operatorname{Im}(q_0, q_1, m, v) = -1. \quad (25)$$

Отсюда:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(q_0, q_1, m, \nu) = -1, \\ \operatorname{Im}(q_0, q_1, m, \nu) = 0. \end{cases} \quad (26)$$

В плоскости корней  $q_0, q_1$  системы уравнений (26) для заданного значения  $m = m_3$  при изменении псевдочастоты  $\nu$  строится линия Д-разбиения и определяются оптимальные настроечные параметры регулятора методом одномерного поиска минимума квадратичной интегральной оценки (2) на линии Д-разбиения. При этом в (2) принимаем  $\Delta t = T$ .

Заметим, что аналогично строится линия Д-разбиения для системы с ПД-регулятором  $R(z) = q_0 - q_2 z^{-1}$ .

В этом случае (25) принимает вид:

$$W_{pc}(z) \Big|_{z = \frac{1+w}{1-w}} = \operatorname{Re}(q_0, q_2, m, \nu) + j \operatorname{Im}(q_0, q_2, m, \nu) = -1. \quad (27)$$

Отсюда:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(q_0, q_2, m, \nu) = -1, \\ \operatorname{Im}(q_0, q_2, m, \nu) = 0. \end{cases} \quad (28)$$

### Пример параметрического синтеза цифровой одноконтурной АСР с использованием метода Д-разбиения

Вначале рассмотрим одноконтурную АСР с передаточной функцией объекта управления

$$W_o(s) = 10 \frac{1}{1 + 100s} e^{-5s}. \quad (29)$$

Рассчитаем оптимальные настроечные параметры аналогового ПИ-регулятора для заданной величины степени колебательности  $m = 0,221$ :

$$R(s) = \frac{0,13419 + 1,62167s}{s}. \quad (30)$$

На рис. 1 изображен переходный процесс рассматриваемой АСР.

Теперь построим линию Д-разбиения (рис. 2) в плоскости настроечных параметров цифрового ПИ-регулятора

$$R(z) = (q_0 - q_1 z^{-1}) / (1 - z^{-1})$$

для данного объекта управления по формулам (26) при  $T = 1$  сек. в диапазоне частот  $0 < \omega < 0,4 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$ .

Оптимальные значения настроечных параметров цифрового ПИ-регулятора найдем одномерным поиском минимума квадратичной интегральной оценки на линии Д-разбиения. Получим:  $q_0 = 2,28772$ ;  $q_1 = -2,2601$ .

Экспериментально установлено, что точка графика, соответствующая оптимальным настройкам цифрового ПИ-регулятора, находится в IV четверти при частоте, равной  $\approx 0,9$  от частоты, соответствующей максимуму  $q_0$  на линии Д-разбиения.

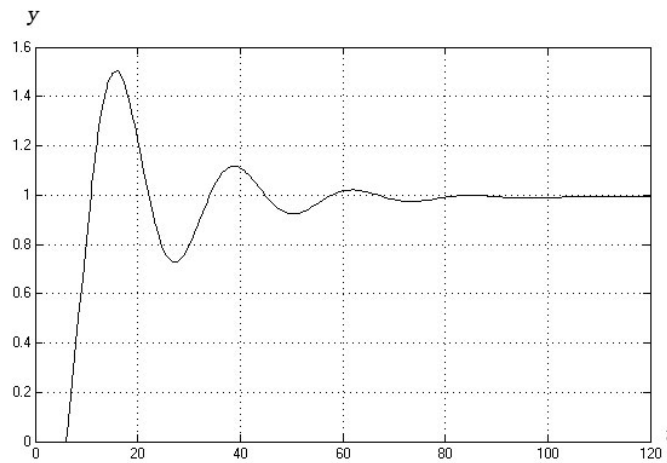


Рис. 1. Переходный процесс аналоговой одноконтурной АСР.

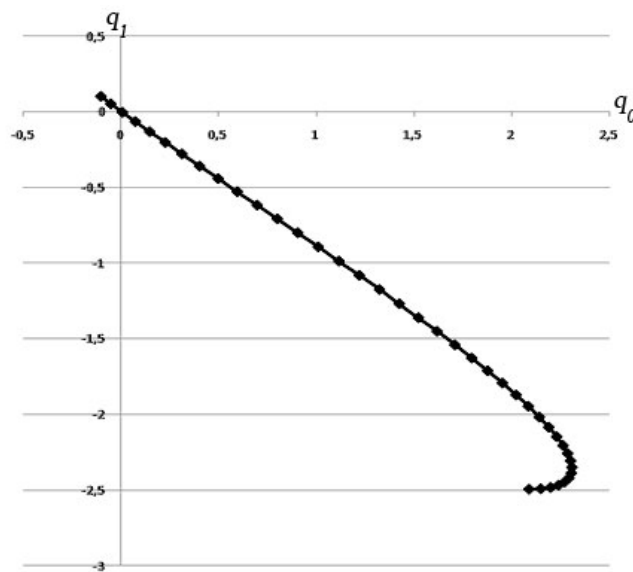


Рис. 2. Линия Д-разбиения для цифрового ПИ-регулятора.

Заметим, что в аналоговых системах оптимальным настройкам в смысле критерия (2) на линии Д-разбиения соответствует частоте  $\omega^{opt}$ , которая равна 1.2 от частоты, при которой имеет место  $c_0 = c_0^{max}$  в системах с ПИ-регулятором или имеет место  $c_1 = c_1^{max}$  в системах с ПД-регулятором [11]. Следовательно, при определении оптимальных настроек ПИ- и ПД-регуляторов достаточно построить линию Д-разбиения, избегая оптимизационных процедур. В этом случае значительно упрощается параметрический синтез указанного типа регуляторов, так как снимается задача выбора настроечных параметров.

Следует отметить, что в широко используемой среде Matlab [14] задача параметрического синтеза сводится к определению настроечных параметров регуляторов для выполнения ограничений по диапазону изменения амплитуды регулируемой переменной относительно заданного значения этой переменной, а также по длительности переходного процесса. Нами установлено, что сходимость расчета оптимальных настроек при использовании [14] зависит от задания начальных условий. Минимизация квадратичной интегральной оценки при параметрическом синтезе здесь [14] не рассматривается. При использовании блока оп-

тимизации для решения задачи в постановке (2) и (3), требуется формирование штрафной функции для выполнения условия (3), с известными трудностями поиска ее экстремума [12]. График переходного процесса для цифровой одноконтурной АСР приведен на рис. 3

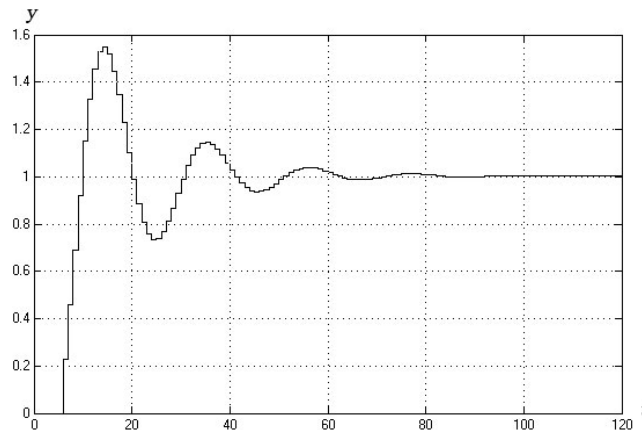


Рис. 3. Переходный процесс цифровой одноконтурной АСР с настройками ПИ-регулятора, найденными предложенным методом.

Сравнение рис. 1 и рис. 3 показывает, что переходные процессы в аналоговой и в цифровой одноконтурной системах близки. В обоих случаях обеспечивается степень затухания  $\psi \approx 0,7$  при заданной степени колебательности  $m = 0,221$ .

### Сравнение методов параметрического синтеза цифровых систем

Ниже приведено сравнение результатов параметрического синтеза одноконтурной цифровой АСР, выполненного предлагаемым методом, в среде Matlab (Step Response Optimization) и двумерным поисковым методом, используемым в работах [3, 5]. На рис. 4 – 8 приведены графики изменения выходной переменной и управления при единичном ступенчатом воздействии по заданию соответственно для оптимальных настроечных параметров ПИ-регулятора по критерию качества (2) предложенным методом, методом в среде Matlab и двумерным поисковым методом сканирования.

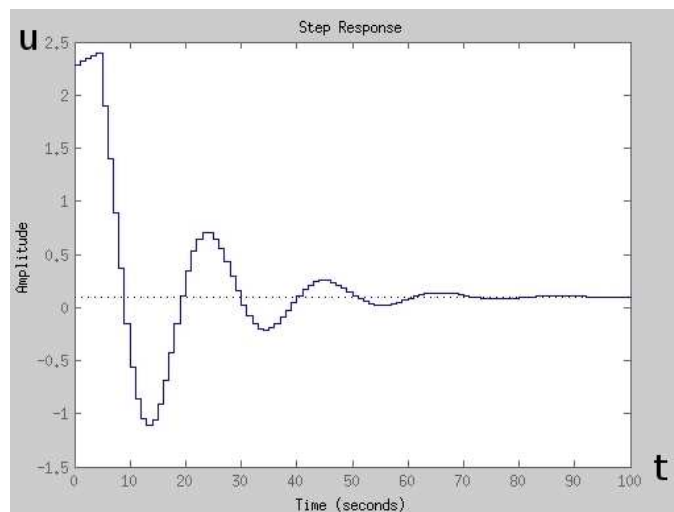
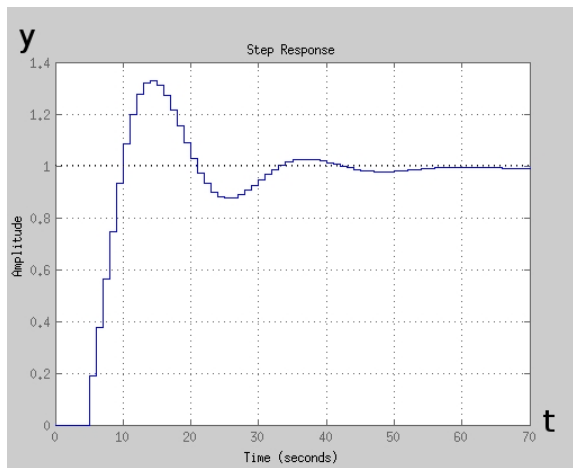
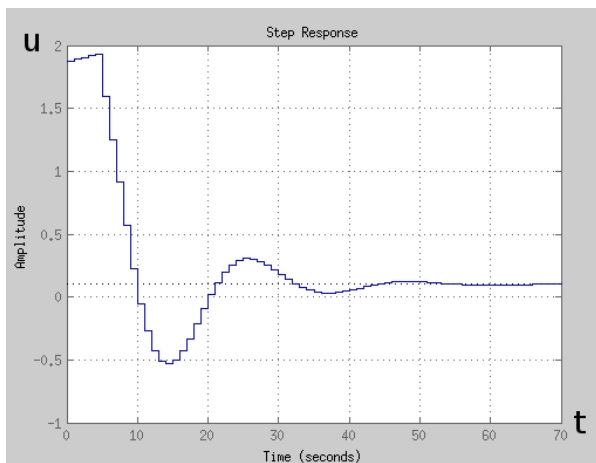


Рис. 4. Изменение управляющего воздействия в оптимальном режиме по критерию (2) при предлагаемом методе.

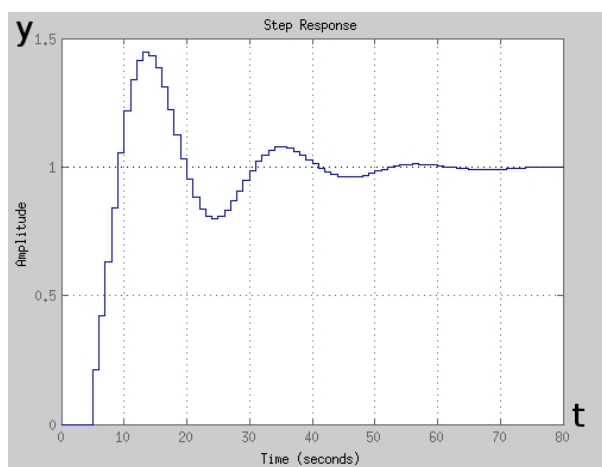


а)

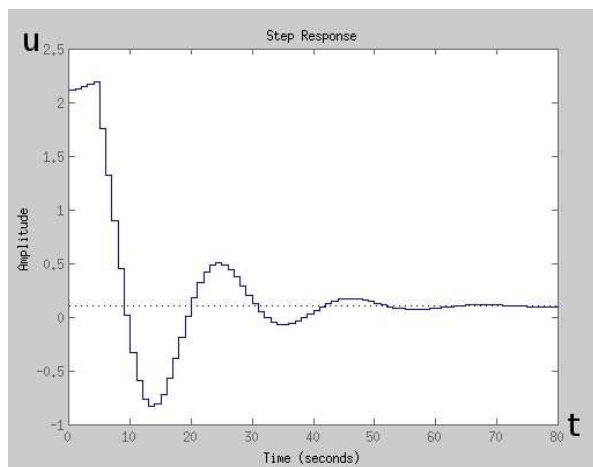


б)

Рис. 5. Изменение: а) выходной переменной; б) управляющего воздействия в оптимальном режиме по критерию (1) при предлагаемом методе.



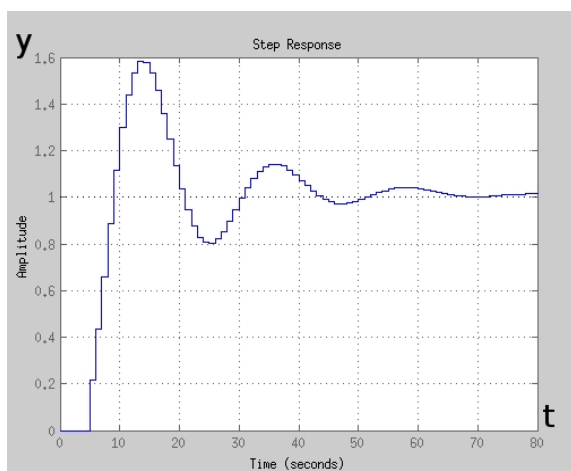
а)



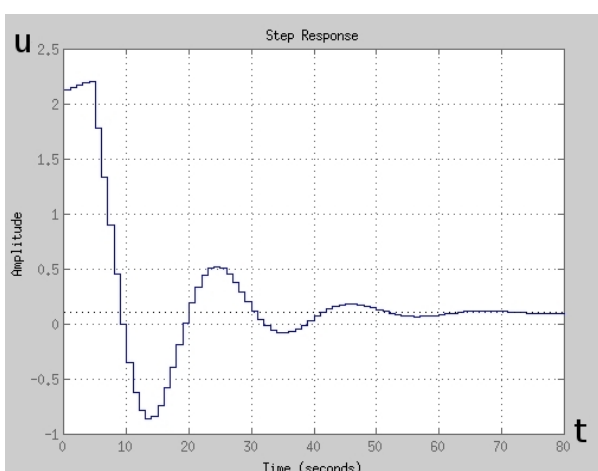
б)

Рис. 6. Изменение: а) выходной переменной; б) управляющего воздействия в оптимальном режиме по критерию (2) при использовании Matlab.

В [3, 5] предлагаются общие методы поиска оптимальных настроек системы. Нами был выбран метод сканирования [12].



а)



б)

Рис. 7. Изменение: а) выходной переменной; б) управляющего воздействия по критерию (2) при использовании метода сканирования.



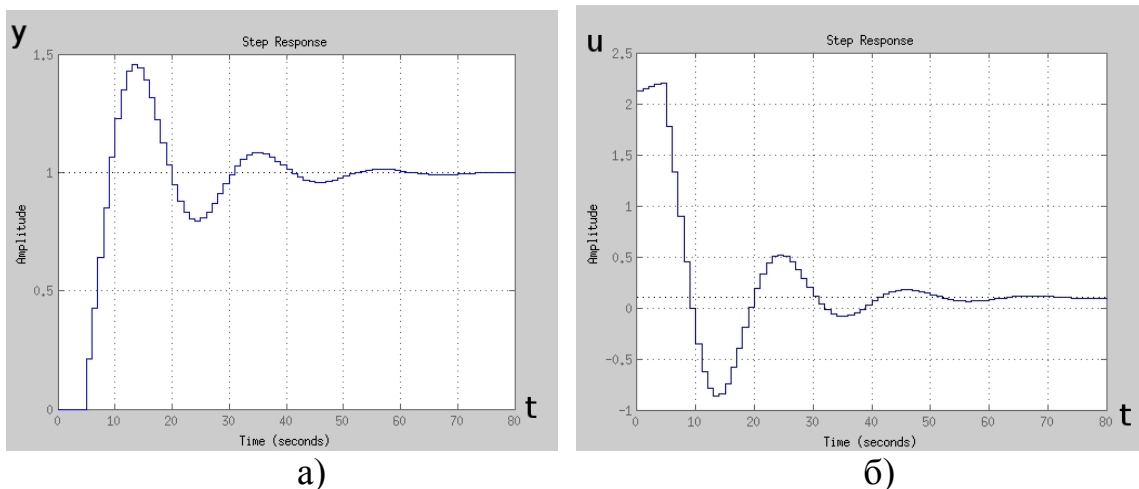


Рис. 8. Изменение выходной переменной а) и управляющего воздействия б) по критерию (1) при использовании метода сканирования.

Сравнение результатов моделирования переходных процессов по выходным переменным показывает, что все переходные процессы близки.

В табл. 1 приведены результаты параметрического синтеза, выполненного предложенным методом и двумерным поисковым методом как по критерию качества (1), так и по критерию качества (2). В табл. 2 приведены значения критерия качества (1) и критерия качества (2), полученные при оптимальных настроечных параметрах по критерию качества (2) предложенным методом, методом в среде Matlab и двумерным поисковым методом.

Таблица 1

Метод синтеза	Полученные настроечные параметры	Интегральная оценка (1) с поправкой на управление (весовой коэффициент $r = 0.25$ )	Интегральная оценка (2)
Метод Д-разбиения	$q_0 = -1,6939$ $q_1 = -1,5989$	14,3052	14,0538
Метод сканирования – 1	$q_0 = 2,1648$ $q_1 = -2,1105$	15,8209	13,9940

Таблица 2

Метод синтеза	Полученные настроечные параметры	Интегральная оценка с поправкой на управление (весовой коэффициент $r = 0.25$ )	Интегральная оценка
Д-разбиение	$q_0 = 2,28772$ $q_1 = -2,2601$	17,2707	13,6884
Matlab (Step Response Optimization)	$q_0 = 2,1121$ $q_1 = -2,0939$	17,4073	12,0921
Метод сканирования – 2	$q_0 = 2,1297$ $q_1 = -2,1105$	17,1736	12,0975

Установлено, что оптимальные настройки ПИ- регулятора по критерию (2), полученные методом сканирования, находятся в диапазоне, ограниченном оптимальными настроечными параметрами, найденными предложенным методом и при использовании Matlab.

### Заключение

Предложенный метод параметрического синтеза цифровых систем управления на основе расширенных амплитудно-фазовых характеристик позволяет понизить размерность задачи оптимизации критерия качества, обеспечить лучшую сходимос ть и уменьшение времени расчета оптимальных настроек регулятора. Это достигается выполнением требований на устойчивость системы по заданному значению степени колебательности. Приведена сравнительная оценка методов параметрического синтеза цифрового ПИ-регулятора.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Цыпкин Я.З.* Теория линейных импульсных систем. – М.: Физматгиз, 1963.
2. *Джури Э.* Импульсные системы автоматического регулирования. – М.: Физматгиз, 1963.
3. *Изерман Р.* Цифровые системы управления. – М.: Мир, 1984.
4. *Roland S. Burns.* Advanced Control Engineering. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2001.
5. *Кудряшов В.С.* Синтез систем цифрового управления многосвязными нестационарными технологическими объектами: Дис... д-ра техн. наук. – Воронеж: ВГТА, 2005.
6. *Поляков К.Ю.* Основы теории цифровых систем управления. – СПб., 2006.
7. *Мееров М.В.* Теория автоматического регулирования и авторегуляторы. / В.Г. Дианов – М.: Гос. науч.-техн. изд-во нефтяной и горно-топливной литературы, 1963.
8. *Агаджанов В.С.* Сборник лабораторных работ по курсу «Теория автоматического управления»: Методическое пособие. – М.: ГРУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 1993.
9. *Удерман Е.Г.* Метод корневого годографа в теории автоматического управления. – Л.: Госэнергоиздат, 1963.
10. *Стефани Е.П.* Основы расчета настройки регуляторов теплоэнергетических процессов. – М.: Энергия 1972.
11. Автоматическое управление в химической промышленности / Е.Г. Дудников, А.В. Казаков, Ю.Н. Софиева, А.Э. Софиев, А.М. Цирлин – М.: Химия, 1987.
12. *Бояринов А.И.* Методы оптимизации в химической технологии / А.И. Бояринов, В.В. Кафаров – М.: Химия 1975.
13. *Ротач В.Я.* Расчет динамики промышленных автоматических систем регулирования. – М.: Энергия, 1973.
14. Simulink – Documentation [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.mathworks.com/help/toolbox/simulink>.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии О.В. Абрамовым.*

*E-mail:*

*Кривошеев Владимир Петрович – [krivosheev@vvsu.ru](mailto:krivosheev@vvsu.ru);*

*Епифанцев Алексей Владимирович – [aale-xey@rambler.ru](mailto:aale-xey@rambler.ru);*

*Кан Борис Анатольевич – [k.b.608@mail.ru](mailto:k.b.608@mail.ru).*