УДК 510:512.8

© 2013 г. **Чье Ен Ун,** д-р техн. наук
(Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск),
А.Б. Шеин, канд. техн. наук
(Чувашский государственный университет, Чебоксары)

МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНОВ. II

Для нахождения корней многочлена с заданной точностью предлагается простой и наглядный метод, основанный на получении итерационных формул за счет выделения из многочленов квадратичных множителей. Во второй части статьи описывается итерационная процедура нахождения корней, основанная на выделении из многочленов квадратичных множителей.

Ключевые слова: многочлены, нахождение корней, квадратичные множители, итерационные формулы, приближенные и точные решения.

Введение

В первой части статьи [1] для нахождения корней многочлена с заданной точностью предлагается простой и наглядный метод, основанный на получении итерационных формул за счет выделения из многочленов простых множителей.

Рассмотрим более сложный случай – нахождение квадратичного множителя. Будем искать множитель в виде

$$(p-p_1)(p-p_2)=p^2-(p_1+p_2)p+p_1p_2=p^2+s_1p+q_1.$$

Решение задачи

Предположим, что известны или заданы первоначальные значения $p_1^{(1)}$ и $p_2^{(1)}$, следовательно, и значения $s_1^{(1)}=-(p_1^{(1)}+p_2^{(1)})$ и $q_1^{(1)}=p_1^{(1)}\cdot p_2^{(1)}$. Умножим и разделим многочлен $P(p)$ на $(p-p_1^{(1)})(p-p_2^{(1)})$ и остановим процесс предполагаемого деления на последнем остатке, который будет многочленом второй степени. Приведем его к каноническому виду и примем $s_1^{(2)}$ и $q_1^{(2)}$ за точные значения s_1 и q_1, так как полагаем, что многочлен $P(p)$ делится на $(p-p_1^{(2)})(p-p_2^{(2)})$ без остатка. Решая квадратное уравнение $p^2+s_1^{(2)}p+q_1^{(2)}=0$, находим значение корней $p_1^{(2)}$ и $p_2^{(2)}$. Таким образом будет выделен первый квадратичный множитель. Точно так же выделяются все последующие квадратичные множители.

Для реализации метода выполним следующие преобразования многочлена $P(p)$:

$$P(p)=(p-p_1^{(1)})P_1^{(1)}(p)+B_0^{(1)}=(p-p_1^{(1)})((p-p_2^{(1)})P_2^{(1)}(p)+$$
$$+C_1^{(1)})+B_0^{(1)}=(p-p_1^{(1)})(p-p_2^{(1)})P_2^{(1)}(p)+(p-p_1^{(1)})C_1^{(1)}+B_0^{(1)}=$$
$$=(p-p_1^{(1)})(p-p_2^{(1)})(C_n p^{n-2}+C_{n-1}^{(1)}p^{n-3}+...+C_3^{(1)}p+C_2^{(1)})+$$
$$+(p-p_1^{(1)})C_1^{(1)}+B_0^{(1)}=(p-p_1^{(1)})(p-p_2^{(1)})(C_n p^{n-2}+C_{n-1}^{(1)}p^{n-3}+...$$
$$+C_3^{(1)}p)+(p-p_1^{(1)})(p-p_2^{(1)})C_2^{(1)}+(p-p_1^{(1)})C_1^{(1)}+B_0^{(1)}.$$

Остаток $(p-p_1^{(1)})(p-p_2^{(1)})C_2^{(1)}+(p-p_1^{(1)})C_1^{(1)}+B_0^{(1)}$ приведем к виду: $C_2^{(1)}(p^2+s_1^{(2)}p+q_1^{(2)})$. Выполнив необходимые преобразования, получим:

$$s_1^{(2)}=-(p_1^{(1)}+p_2^{(1)})+\frac{C_1^{(1)}}{C_2^{(1)}},\quad q_1^{(2)}=p_1^{(1)}\cdot p_2^{(1)}-\frac{p_1^{(1)}C_1^{(1)}-B_0^{(1)}}{C_2^{(1)}}.$$

Так как $-(p_1^{(1)}+p_2^{(1)})=s_1^{(1)}$, $p_1^{(1)}\cdot p_2^{(1)}=q_1^{(1)}$, то полученные формулы можно записать в виде

$$s_1^{(2)}=s_1^{(1)}+\frac{C_1^{(1)}}{C_2^{(1)}},\, q_1^{(2)}=q_1^{(1)}-\frac{p_1^{(1)}C_1^{(1)}-B_0^{(1)}}{C_2^{(1)}},\tag{39}$$
$$B_n=A_n,\, B_j^{(1)}=A_j+p_1^{(1)}B_{j+1}^{(1)},\; j=n-1,...,0,;$$
$$C_n=B_n,\, C_j^{(1)}=B_j^{(1)}+p_2^{(1)}C_{j+1}^{(1)},\; j=n-1,...,1,$$

(здесь и далее номера формул продолжают нумерацию работы [1]).

Решая квадратное уравнение $p^2+s_1^{(2)}p+q_1^{(2)}=0$, находим значения корней $p_{1,2}^{(2)}=-0{,}5s_1^{(2)}\pm\sqrt{0{,}25\left(s_1^{(2)}\right)^2-q_1^{(2)}}$. При этом, если выполняется условие $0{,}5s_1^{(2)}\ge\pm\sqrt{q_1^{(2)}}$, то корни $p_{1,2}^{(2)}$ являются действительными. В противном случае корни $p_{1,2}^{(2)}$ являются комплексно-сопряженными.

Последующие квадратичные множители выделяются аналогично. Так, для второго квадратичного множителя выполняются следующие преобразования многочлена $P_2(p)$:

$$P_2(p)=(p-p_3^{(1)})P_3^{(1)}(p)+D_2^{(1)}=(p-p_3^{(1)})\cdot\left((p-p_4^{(1)})P_4^{(1)}(p)+F_3^{(1)}\right)+D_2^{(1)}=$$
$$=(p-p_3^{(1)})(p-p_4^{(1)})P_4^{(1)}(p)+(p-p_3^{(1)})F_3^{(1)}+D_2^{(1)}=(p-p_3^{(1)})(p-p_4^{(1)})\cdot$$
$$\cdot\left(F_n p^{n-4}+F_{n-1}^{(1)}p^{n-5}+...+F_5^{(1)}p+F_4^{(1)}\right)+(p-p_3^{(1)})F_3^{(1)}+D_2^{(1)}=$$
$$=(p-p_3^{(1)})(p-p_4^{(1)})(F_n p^{n-4}+F_{n-1}^{(1)}p^{n-5}+...+F_5^{(1)}p)+$$
$$+(p-p_3^{(1)})(p-p_4^{(1)})F_4^{(1)}++(p-p_3^{(1)})F_3^{(1)}+D_2^{(1)}.$$

Преобразовав остаток $(p-p_3^{(1)})(p-p_4^{(1)})F_4^{(1)}+(p-p_3^{(1)})F_3^{(1)}+D_2^{(1)}$ к виду $F_4^{(1)}(p^2-s_2^{(2)}p+q_2^{(2)})$, получим:

$$s_2^{(2)} = s_2^{(1)} + \frac{F_3^{(1)}}{F_4^{(1)}},\ q_2^{(2)} = q_2^{(1)} - \frac{p_3^{(1)} F_3^{(1)} - D_2^{(1)}}{F_4^{(1)}}, \qquad (40)$$

где $s_2^{(1)} = -(p_3^{(1)} + p_4^{(1)}),\ q_2^{(1)} = p_3^{(1)} \cdot p_4^{(1)};\quad D_n = C_n,\ D_j^{(1)} = C_j^{(1)} + p_3^{(1)} D_{j+1}^{(1)},\ \ j = n-1,...,2;$ $F_n = D_n,\ F_j^{(1)} = D_j^{(1)} + p_4^{(1)} F_{j+1}^{(1)},\ \ j = n-1,...,3.$

Значения корней $p_{3,4}^{(2)}$ находятся при решении уравнения $p^2 + s_2^{(2)} p + q_2^{(2)} = 0$:

$$p_{3,4}^{(2)} = -0{,}5 s_2^{(2)} \pm \sqrt{0{,}25\left(s_2^{(2)}\right)^2 - q_2^{(2)}}.$$

Если $0{,}5 s_2^{(2)} \geq \pm\sqrt{q_2^{(2)}}$, тогда корни $p_{3,4}^{(2)}$ будут действительными. В противном случае корни $p_{3,4}^{(2)}$ будут комплексно-сопряженными.

Таким образом, могут быть выделены все квадратичные множители.

При выделении последнего квадратичного множителя все преобразования выполняются применительно к квадратичному многочлену $P_{n-2}(p)$:

$$P_{n-2}(p) = \left(p - p_{n-1}^{(1)}\right) P_{n-1}^{(1)}(p) + S_{n-2}^{(1)} = R_n \left(p^2 + s_{n-2}^{(2)} p + q_{n-2}^{(2)}\right).$$

Следовательно, имеем $s_{n-2}^{(2)} = -\left(p_{n-1}^{(1)} + p_n^{(1)}\right) + \dfrac{R_{n-1}^{(1)}}{R_n} = s_{n-2}^{(1)} + \dfrac{R_{n-1}^{(1)}}{R_n}$,

$$q_{n-2}^{(2)} = p_{n-1}^{(1)} p_n^{(1)} - \frac{p_{n-1}^{(1)} R_{n-1}^{(1)} - S_{n-2}^{(1)}}{R_n} = q_{n-2}^{(1)} - \frac{p_{n-1}^{(1)} R_{n-1}^{(1)} - S_{n-2}^{(1)}}{R_n}, \qquad (41)$$

где $S_n = H_n,\ S_j^{(1)} = H_j^{(1)} + p_{n-1}^{(1)} S_{j+1}^{(1)};\ j = n-1, n-2;\ R_n = S_n,\ R_{n-1}^{(1)} = S_{n-1}^{(1)} + p_n^{(1)} R_n.$

Значения корней $p_{n-1}^{(2)}$ и $p_n^{(2)}$ находим из уравнения $p^2 + s_{n-2}^{(2)} p + q_{n-2}^{(2)} = 0$. При этом, если выполняется неравенство $0{,}5 s_{n-2}^{(2)} \geq \pm\sqrt{q_{n-2}^{(2)}}$, то корни $p_{n-1}^{(2)}$ и $p_n^{(2)}$ будут действительными. В противном случае корни $p_{n-1}^{(2)}$ и $p_n^{(2)}$ – комплексно-сопряженные.

Пример 2. Требуется найти корни характеристического многочлена

$$P(p) = A_4 p^4 + A_3 p^3 + A_2 p^2 + A_1 p + A_0,$$

где $A_4 = 1;\ A_3 = 20;\ A_2 = 1{,}11 \cdot 10^8;\ A_1 = 1{,}11 \cdot 10^9;\ A_0 = 1 \cdot 10^{15}.$

Пусть первоначальные значения корней $p_1^{(1)}$ и $p_2^{(1)}$ равны:

$$p_1^{(1)} = -1 + j1000,\ p_2^{(1)} = -1 - j1000.$$

Находим:

$$s_1^{(1)} = -(p_1^{(1)} + p_2^{(1)}) = 2,\ q_1^{(1)} = p_1^{(1)} \cdot p_2^{(1)} = 1000001;$$

$$B_4 = A_4 = 1,\ B_3^{(1)} = A_3 + p_1^{(1)} B_4 = 1{,}09999 \cdot 10^8 + j18000,$$

$$B_1^{(1)} = A_1 + p_1^{(1)} \cdot B_2^{(1)} = 9{,}82001 \cdot 10^8 + j1{,}09998 \cdot 10^{11},$$

$$B_0^{(1)} = A_0 + p_1^{(1)} \cdot B_1^{(1)} = 8{,}90001 \cdot 10^{14} + j8{,}72003 \cdot 10^{11};$$

$$C_4 = B_4 = 1,\ C_3^{(1)} = B_3^{(1)} + p_2^{(1)} C_4 = 18,$$

$C_2^{(1)} = B_2^{(1)} + p_2^{(1)} C_3^{(1)} = 1{,}09998 \cdot 10^8$, $C_1^{(1)} = B_1^{(1)} + p_2^{(1)} C_2^{(1)} = 8{,}72003 \cdot 10^8$.

Следовательно:

$$s_1^{(2)} = s_1^{(1)} + C_1^{(1)} \big/ C_2^{(1)} = 9{,}9274441; \; q_1^{(2)} = q_1^{(1)} - \frac{p_1^{(1)} C_1^{(1)} - B_0^{(1)}}{C_2^{(1)}} = 9091074{,}3.$$

Решая квадратное уравнение $p^2 + s_1^{(2)} \cdot p + q_1^{(2)} = 0$, находим:

$$p_{1,2}^{(2)} = -0{,}5 s_1^{(2)} \pm \sqrt{0{,}25\left(s_1^{(2)}\right)^2 - q_1^{(2)}} = -4{,}963722 \pm j3015{,}1367.$$

Таким образом, первый квадратичный множитель многочлена $P(p)$ выделен.

Выделим второй квадратичный множитель. Для этого произвольно зададим первоначальное значение корней: $p_3^{(1)} = -1 + j1000$, $p_4^{(1)} = -1 - j1000$. Находим:

$s_2^{(1)} = -\left(p_3^{(1)} + p_4^{(1)}\right) = 2$, $q_2^{(1)} = p_3^{(1)} \cdot p_4^{(1)} = 1000001$;

$D_4 = C_4 = 1$, $D_3^{(1)} = C_3^{(1)} + p_3^{(1)} D_4 = 17 + j1000$;

$D_2^{(1)} = C_2^{(1)} + p_3^{(1)} D_3^{(1)} = 1{,}08997 \cdot 10^8 + j16000$;

$F_4 = D_4 = 1$, $F_3^{(1)} = D_3^{(1)} + p_4^{(1)} F_4 = 16$.

Следовательно:

$$s_2^{(2)} = s_2^{(1)} + F_3^{(1)} \big/ F_4 = 18; \; q_2^{(2)} = q_2^{(1)} - \frac{p_3^{(1)} F_3^{(1)} - D_2^{(1)}}{F_4} = 1{,}09998 \cdot 10^8.$$

Решая квадратное уравнение $p^2 + s_2^{(2)} \cdot p + q_2^{(2)} = 0$, находим:

$$p_{3,4}^{(2)} = -0{,}5 s_2^{(2)} \pm \sqrt{0{,}25\left(s_2^{(2)}\right)^2 - q_2^{(2)}} = -9 \pm j10487{,}989.$$

Таким образом, второй квадратичный множитель многочлена $P(p)$ также выделен.

В результате имеем:

$$P(p) = \left(p^2 + s_1^{(2)} \cdot p + q_1^{(2)}\right)\left(p^2 + s_2^{(2)} p + q_2^{(2)}\right) = p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0,$$

где $a_3 = s_1^{(2)} + s_2^{(2)} = 27{,}927444$ (точное значение равно 20);

$a_2 = s_1^{(2)} \cdot s_2^{(2)} + \left(q_1^{(2)} + q_2^{(2)}\right) = 1{,}19089 \cdot 10^8$ (точное значение равно $1{,}11 \cdot 10^8$);

$a_1 = s_1^{(2)} \cdot q_2^{(2)} + s_2^{(2)} q_1^{(2)} = 1{,}25563 \cdot 10^9$ (точное значение равно $1{,}11 \cdot 10^9$);

$a_0 = q_1^{(2)} \cdot q_2^{(2)} =^8 9{,}99999 \cdot 10^{14}$ (точное значение равно $1 \cdot 10^{15}$).

Видно, что, несмотря на весьма грубое задание первоначальных значений корней квадратичных множителей, получены достаточно точные значения корней многочлена. Эти значения можно уточнить, если в качестве первоначальных задать уже рассчитанные их значения.

Пусть $p_1^{(2)} = -4{,}963722 + j3015{,}1367$; $p_2^{(2)} = -4{,}963722 - j3015{,}1367$. Тогда, выполняя второй цикл приближений, находим:

$B_4 = A_4 = 1$, $B_3^{(2)} = A_3 + p_1^{(2)} B_4 = 15{,}036278 + j3015{,}1367$;

$$B_2^{(2)} = A_2 + p_1^{(2)} B_3^{(2)} = = 1{,}01908 \cdot 10^8 + j30370{,}133;$$

$$B_1^{(2)} = A_1 + p_1^{(2)} B_2^{(2)} = 5{,}12587 \cdot 10^8 + j3{,}07265 \cdot 10^{11};$$

$$B_0^{(2)} = A_0 + + p_1^{(2)} B_1^{(2)} = 7{,}35524 \cdot 10^{13} + j2{,}034 \cdot 10^{10};$$

$$C_4 = B_4 = 1,\ C_3^{(2)} = B_3^{(2)} + p_2^{(2)} C_4 = 10{,}072556;$$

$$C_2^{(2)} = B_2 + p_2^{(2)} C_3^{(2)} = 1{,}01907 \cdot 10^8;\ \ C_1^{(2)} = B_1^{(2)} + p_2^{(2)} C_2^{(2)} = 6749000.$$

Следовательно: $s_1^{(3)} = s_1^{(2)} + C_1^{(2)} \big/ C_2^{(2)} = 9{,}9936711;$

$$q_1^{(3)} = q_1^{(2)} - \frac{p_1^{(2)} C_1^{(2)} - B_0^{(2)}}{C_2^{(2)}} = 9812834{,}6;$$

$$p_{1,2}^{(3)} = -0{,}5 s_1^{(3)} \pm \sqrt{0{,}25\left(s_1^{(3)}\right)^2 - q_1^{(3)}} = -4{,}9968355 \pm j3132{,}5404.$$

Таким образом, получены первые улучшенные значения первых двух корней многочлена $P(p)$.

Выделим второй квадратичный множитель, задавая уже рассчитанные значения корней $p_3^{(2)} = -9 + j10487{,}989$ и $p_4^{(2)} = -9 - j10487{,}989$.

Находим:

$$D_4 = C_4 = 1;\ D_3^{(2)} = C_3^{(2)} + p_3^{(2)} D_4 = 1{,}072556 + j10487{,}989;$$

$$D_2^{(2)} = C_2^{(2)} + p_3^{(2)} D_3^{(2)} = -8090009{,}7 - j83142{,}946;$$

$$F_4 = D_4 = 1;\quad F_3^{(2)} = D_3^{(2)} + p_4^{(2)} F_4 = -7{,}927444.$$

Следовательно:

$$s_2^{(3)} = s_2^{(2)} + F_3^{(2)} \big/ F_4 = 10{,}072556,\ \ q_2^{(3)} = q_2^{(2)} - \frac{p_3^{(2)} F_3^{(2)} - D_2^{(2)}}{F_4} = 1{,}01907 \cdot 10^8;$$

$$p_{3,4}^{(3)} = -0{,}5 s_2^{(3)} \pm \sqrt{0{,}25\left(s_2^{(3)}\right)^2 - q_2^{(3)}} = -5{,}036278 \pm j10094{,}898.$$

В результате имеем:

$$P(p) = \left(p^2 + s_1^{(3)} \cdot p + q_1^{(3)}\right)\left(p^2 + s_2^{(3)} \cdot p + q_2^{(3)}\right) = p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0,$$

где

$$a_3 = s_1^{(3)} + s_2^{(3)} = 20{,}066227;\ \ a_2 = s_1^{(3)} \cdot s_2^{(3)} + \left(q_1^{(3)} + q_2^{(3)}\right) = 1{,}11719 \cdot 10^8;$$

$$a_1 = s_1^{(3)} q_2^{(3)} + s_2^{(3)} q_1^{(3)} = 1{,}11729 \cdot 10^9;\ \ a_0 = q_1^{(3)} \cdot q_2^{(3)} = 9{,}99996 \cdot 10^{14}.$$

Для нахождения еще более точных значений корней многочлена $P(p)$ выполним третье приближение, взяв за исходные данные к расчету значения корней, полученные при втором приближении:

$$p_1^{(3)} = -4{,}9968355 + j3132{,}5404;\quad p_2^{(3)} = -4{,}9968355 - j3132{,}5404;$$

$$p_3^{(3)} = -5{,}036278 + j10094{,}898;\quad p_4^{(3)} = -5{,}036278 - j10094{,}898.$$

Выделим первый квадратичный множитель. Для этого находим:

$$B_4 = A_4 = 1;\ \ B_3^{(3)} = A_3 + p_1^{(3)} B_4 = 15{,}003164 + j3132{,}5404;$$

$$B_2^{(3)} = A_2 + p_1^{(3)} B_3^{(3)} = 1{,}01187 \cdot 10^8 + j31345{,}228;$$
$$B_1^{(3)} = A_1 + p_1^{(3)} B_2^{(3)} = 5{,}06199 \cdot 10^8 + j3{,}16971 \cdot 10^{11};$$
$$B_0^{(3)} = A_0 + p_1^{(3)} B_1^{(3)} = 7{,}07347 \cdot 10^{12} + j1{,}88 \cdot 10^9;$$
$$C_4 = B_4 = 1;\ C_3^{(3)} = B_3^{(3)} + p_2^{(3)} C_4 = 10{,}006328;$$
$$C_2^{(3)} = B_2^{(3)} + p_2^{(3)} C_3^{(3)} = 1{,}01186 \cdot 10^8;$$
$$C_1^{(3)} = B_1^{(3)} + p_2^{(3)} C_2^{(3)} = 599000.$$

Следовательно: $S_1^{(4)} = S_1^{(3)} + C_1^{(3)} \big/ C_2^{(3)} = 9{,}9995908;$

$$q_1^{(4)} = q_1^{(3)} - \frac{p_1^{(3)} C_1^{(3)} - B_0^{(3)}}{C_2^{(3)}} = 9882740{,}2;$$

$$p_{1,2}^{(4)} = -0{,}5 s_1^{(4)} \pm \sqrt{0{,}25\left(s_1^{(4)}\right)^2 - q_1^{(4)}} = -4{,}9997954 \pm j3143{,}6786.$$

Выделим второй квадратичный множитель. Для этого находим:

$$D_4 = C_4 = 1;\ D_3^{(3)} = C_3^{(3)} + p_3^{(3)} D_4 = 4{,}97005 + j10094{,}898;$$
$$D_2^{(3)} = C_2^{(3)} + p_3^{(3)} D_3^{(3)} = -720025{,}1 - j668{,}565;$$
$$F_4 = D_4 = 1;\ F_3^{(3)} = D_3^{(3)} + p_4^{(3)} F_4 = -\,0{,}066228;$$
$$s_2^{(4)} = s_2^{(3)} + F_3^{(3)} \big/ F_4 = = 10{,}006328;$$
$$q_2^{(4)} = q_2^{(3)} - \frac{p_3^{(3)} F_3^{(3)} - D_2^{(3)}}{F_4} = 1{,}01186 \cdot 10^8;$$
$$p_{3,4}^{(4)} = -0{,}5 s_2^{(4)} \pm \sqrt{0{,}25\left(s_2^{(4)}\right)^2 - q_2^{(4)}} = -\,5{,}003164 \pm j10059{,}123.$$

Имеем:

$$P(p) = (p^2 + s_1^{(4)} \cdot p + q_1^{(4)})\,(p^2 + s_2^{(4)} \cdot p + q_2^{(4)}) = \ p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0,$$

где

$$a_3 = s_1^{(4)} + s_2^{(4)} 8 = 20{,}005918;\ a_2 = s_1^{(4)} \cdot s_2^{(4)} + \left(q_1^{(4)} + q_2^{(4)}\right) = 1{,}11068 \cdot 10^8;$$
$$a_1 = s_1^{(4)} q_2^{(4)} + s_2^{(4)} q_1^{(4)} = 1{,}1107 \cdot 10^9;\ a_0 = q_1^{(4)} \cdot q_2^{(4)} = 9{,}99994 \cdot 10^{14}.$$

Видно, что при третьем приближении значения корней многочлена $P(p)$ найдены с достаточно высокой точностью и могут быть приняты за окончательные: $p_1 = -5 + j3144;\ p_2 = -5 - j3144;\ p_3 = -5 + j10059;\ p_4 = -5 - j10059.$

Таким образом, если для нахождения значений корней многочлена $P(p)$ требуется итерационная процедура, как это было в приведенном выше примере, то удобно использовать следующие рекуррентные формулы:

$$s_1^{(m+1)} = s_1^{(m)} + C_1^{(m)} \big/ C_2^{(m)};\ q_1^{(m+1)} = q_1^{(m)} - (p_1^{(m)} C_1^{(m)} - B_0^{(m)}) \big/ C_2^{(m)},$$

где m – число итераций. Здесь:

$$B_n = A_n,\ B_j^{(m)} = A_j + p_1^{(m)} B_{j+1}^{(m)},\ \ j = n-1,...,0;$$
$$C_n = B_n,\ C_j^{(m)} = B_j^{(m)} + p_2^{(m)} C_{j+1}^{(m)},\ \ j = n-1,...,1;$$

$$s_2^{(m+1)} = s_2^{(m)} + F_3^{(m)} \Big/ F_4^{(m)};\ q_2^{(m+1)} = q_2^{(m)} - (p_3^{(m)} F_3^{(m)} - D_2^{(m)}) \Big/ F_4^{(m)};$$

$$D_n = C_n,\ D_j^{(m)} = C_j^{(m)} + p_3^{(m)} D_{j+1}^{(m)},\ j = n-1,...,2;$$

$$F_n = D_n,\ F_j^{(m)} = D_j^{(m)} + p_4^{(m)} F_{j+1}^{(m)},\ j = n-1,...,3;$$

……………………………………………………………

$$s_{n-2}^{(m+1)} = s_{n-2}^{(m)} + R_{n-1}^{(m)} \Big/ R_n;\ q_{n-2}^{(m+1)} = q_{n-2}^{(m)} - (p_{n-1}^{(m)} R_{n-1}^{(m)} - S_{n-2}^{(m)}) \Big/ R_n;$$

$$S_n = H_n,\ S_j^{(m)} = H_j^{(m)} + p_{n-1}^{(m)} S_{j+1}^{(m)},\ j = n-1, n-2;$$

$$R_n = S_n,\ R_{n-1}^{(m)} = S_{n-1}^{(m)} + p_n^{(m)} R_n\ ,$$

При этом корни каждого квадратичного множителя находятся решением соответствующего квадратного уравнения.

Формулы (29) или (31) и (32) – (38) [1] применяются, если многочлен $P(p)$ имеет действительные корни. Формулы (39) – (41) используются, когда степень многочлена $P(p)$ четная. При этом корни могут быть как действительные, так и комплексно-сопряженные. Если степень многочлена нечетная, тогда действительный корень определяют по формулам (29) или (31), а затем, когда степень становится четной, процесс нахождения корней выполняют разложением многочлена на квадратичные множители, т.е. используют формулы (39) – (41). Формулы (29) или (31) и (39) – (41) могут быть объединены в общий алгоритм, который применяется, когда степень многочлена $P(p)$ нечетная. В этом случае сначала находится действительный корень многочлена $P(p)$, – например, по формуле (29), которая для итерационной процедуры нахождения точного значения корня имеет вид:

$$p_1^{(m+1)} = p_1^{(m)} - B_0^{(m)} \Big/ B_1^{(m)}, \tag{42}$$

где $B_n = A_n,\ B_j^{(m)} = A_j + p_1^{(m)} B_{j+1}^{(m)},\ j = n-1,...,0$.

Затем для нахождения остальных корней используются формулы, аналогичные формулам (39) – (41):

$$s_1^{(m+1)} = s_1^{(m)} + D_2^{(m)} \Big/ D_3^{(m)};\ q_1^{(m+1)} = q_1^{(m)} - (p_2^{(m)} D_2^{(m)} - C_1^{(m)}) \Big/ D_3^{(m)}, \tag{43}$$

где $C_n = B_n,\ C_j^{(m)} = B_j^{(m)} + p_2^{(m)} C_{j+1}^{(m)},\ j = n-1,...,1;$

$$D_n = C_n,\ D_j^{(m)} = C_j^{(m)} + p_3^{(m)} D_{j+1}^{(m)},\ j = n-1,...,2;$$

$$p_{2,3}^{(m+1)} = -0{,}5 s_1^{(m)} \pm \sqrt{0{,}25 \left(s_1^{(m)}\right)^2 - q_1^{(m)}};$$

$$s_2^{(m+1)} = s_2^{(m)} + G_4^{(m)} \Big/ G_5^{(m)};\ q_2^{(m+1)} = q_2^{(m)} - (p_4^{(m)} G_4^{(m)} - F_3^{(m)}) \Big/ G_5^{(m)}, \tag{44}$$

где $F_n = D_n,\ F_j^{(m)} = D_j^{(m)} + p_4^{(m)} F_{j+1}^{(m)},\ j = n-1,...,3;$

$$G_n = F_n,\ G_j^{(m)} = F_j^{(m)} + p_5^{(m)} G_{j+1}^{(m)},\ j = n-1,...,4;$$

$$p_{4,5}^{(m+1)} = -0{,}5 s_2^{(m)} \pm \sqrt{0{,}25 \left(s_2^{(m)}\right)^2 - q_2^{(m)}}$$

и т. д., где $s_1^{(m)} = -\left(p_2^{(m)} + p_3^{(m)}\right),\ q_1^{(m)} = -p_2^{(m)} p_3^{(m)};$

$s_2^{(m)} = -\left(p_4^{(m)} + p_5^{(m)}\right)$, $q_2^{(m)} = -p_4^{(m)} p_5^{(m)}$ и т. д.

Пример 3. Требуется найти значения корней многочлена нечетной степени $(n=3)$ $P(p) = A_3 p^3 + A_2 p^2 + A_1 p + A_0$, где $A_3 = 1$, $A_2 = 20$, $A_1 = 1{,}01 \cdot 10^8$, $A_0 = 1{,}01 \cdot 10^9$.

Пусть первоначальное значение действительного корня $p_1^{(1)} = -1$.

По формуле (42) находим:

$B_3 = A_3 = 1$; $B_2^{(1)} = A_2 + p_1^{(1)} B_3 = 19$; $B_1^{(1)} = A_1 + p_1^{(1)} B_2^{(1)} = 1{,}00999 \cdot 10^8$;

$B_0^{(1)} = A_0 + p_1^{(1)} B_1^{(1)} = 9{,}09001 \cdot 10^8$.

Следовательно:

$p_1^{(2)} = p_1^{(1)} - B_0^{(1)} / B_1^{(1)} = -10{,}000099$.

Пусть первоначальные значения комплексно-сопряженных корней равны: $p_2^{(1)} = -1 + j1000$; $p_3^{(1)} = -1 - j1000$.

Тогда

$s_1^{(1)} = -\left(p_2^{(1)} + p_3^{(1)}\right) = 2$, $q_1^{(1)} = p_2^{(1)} \cdot p_3^{(1)} = 1000001$.

По формуле (43) находим:

$C_3 = B_3 = 1$; $C_2^{(1)} = B_2^{(1)} + p_2^{(1)} C_3 = 18 + j1000$;

$C_1^{(1)} = B_1^{(1)} + p_2^{(1)} C_2^{(1)} = 99998982 + j17000$;

$D_3 = C_3 = 1$; $D_2^{(1)} = C_2^{(1)} + p_3^{(1)} D_3 = 17$.

Следовательно:

$s_1^{(2)} = s_1^{(1)} + D_2^{(1)} / D_3 = 19$; $q_1^{(2)} = q_1^{(1)} - (p_2^{(1)} D_2^{(1)} - C_1^{(1)}) / D_3 = 1{,}00999 \cdot 10^8$;

$p_{2,3}^{(2)} = -0{,}5 \cdot s_1^{(2)} \pm \sqrt{0{,}25\left(s_1^{(2)}\right)^2 - q_1^{(2)}} = -9{,}5 \pm j10049{,}821$.

Выполним второе приближение, полагая, что

$p_1^{(2)} = -10{,}000099$, $p_2^{(2)} = -9{,}5 + j10049{,}821$, $p_3^{(2)} = -9{,}5 - j10049{,}821$.

Находим:

$B_3 = A_3 = 1$; $B_2^{(2)} = A_2 + p_1^{(2)} B_3 = 9{,}999901$;

$B_1^{(2)} = A_1 + p_1^{(2)} B_2^{(2)} = 1{,}00999 \cdot 10^8$; $B_0^{(2)} = A_0 + p_1^{(2)} B_1^{(2)} = 0$.

Следовательно: $p_1^{(3)} = p_1^{(2)} - B_0^{(2)} / B_1^{(2)} = -10{,}000099$;

$C_3 = B_3 = 1$; $C_2^{(2)} = B_2^{(2)} + p_2^{(2)} C_3 = 0{,}499901 + j10049{,}821$;

$C_1^{(2)} = B_1^{(2)} + p_2^{(2)} C_2^{(2)} = 995{,}2 - j90449{,}383$;

$D_3 = C_3 = 1$; $D_2^{(2)} = C_2^{(2)} + p_3^{(2)} D_3 = -9{,}000099$;

$s_1^{(3)} = s_1^{(2)} + D_2^{(2)} / D_3 = 9{,}999901$;

$q_1^{(3)} = q_1^{(2)} - (p_2^{(2)} D_2^{(2)} - C_1^{(2)}) / D_3 = 1{,}00999 \cdot 10^8$;

$p_{2,3}^{(3)} = -0{,}5 \cdot s_1^{(3)} \pm \sqrt{0{,}25\left(s_1^{(3)}\right)^2 - q_1^{(3)}} = -4{,}9999505 \pm j10049{,}824$.

Выполним проверку полученных результатов, используя формулы Виета [2]:

$A_2 = a_2 = -(p_1 + p_2 + p_3) = 20$ (точное значение равно 20);

$A_1 = a_1 = p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3 = 1{,}00999 \cdot 10^8$ (точное значение равно $1{,}01 \cdot 10^8$);

$A_0 = a_0 = -p_1 p_2 p_3 = 1{,}00999 \cdot 10^9$ (точное значение равно $1{,}01 \cdot 10^9$).

Следовательно, после второй итерации корни найдены с достаточно высокой точностью и для расчетов можно принять значения

$p_1 = -10.000099,\ p_2 = -5 + j10050,\ p_3 = -5 - j10050.$

Полученные значения корней полностью совпадают со значениями корней, найденными по точной формуле, выраженной через радикалы.

Нетрудно показать, что известные итерационные методы могут быть модифицированы, если к ним применить подход, рассмотренный выше. Так, для нахождения действительных корней многочлена $P(p)$ по методу Ньютона (метод Ньютона-Рафсона, метод касательных) [3, 4] может быть использована модификация формулы Ньютона, которую нетрудно получить, выполнив следующую цепь преобразований:

1) для определения корня p_1 имеем формулу Ньютона вида:

$$p_1^{(m+1)} = p_1^{(m)} - P(p_1^{(m)}) \big/ P'(p_1^{(m)}),$$

где m – число приближений (итераций);

2) так как

$$P(p) = A_n p^n + A_{n-1} p^{n-1} + \ldots + A_2 p^2 + A_1 p + A_0 =$$
$$= (p - p_1)(B_n p^{n-1} + B_{n-1} p^{n-2} + \ldots + B_3 p^2 + B_2 p + B_1) + B_0 =$$
$$= (p - p_1) P_1(p) + B_0, \text{ то } P(p_1) = B_0;$$

3) дифференцируя $P(p)$, получим: $P'(p) = (p - p_1) P_1'(p) + P_1(p);$ следовательно, $P'(p_1) = P_1(p_1);$

4) так как $P_1(p_1) = B_n p_1^{n-1} + B_{n-1} p^{n-2} + \ldots + B_2 p_1 + B_1 = C_0$, тогда $P'(p_1) = C_0;$

5) в результате формула Ньютона принимает вид

$$p_1^{(m+1)} = p_1^{(m)} - P(p_1^{(m)}) \big/ P'(p_1^{(m)}) = p_1^{(m)} - B_0^{(m)} \big/ C_0^{(m)}, \tag{45}$$

$$B_n = A_n;\ B_j^{(m)} = A_j + p_1^{(m)} B_{j+1}^{(m)},\ \ j = n-1, \ldots, 0;$$

$$C_0^{(m)} = B_n \cdot \left(p_1^{(m)}\right)^{n-1} + B_{n-1}^{(m)} \left(p_1^{(m)}\right)^{n-2} + \ldots + B_2^{(m)} \cdot \left(p_1^{(m)}\right) + B_1^m .$$

Аналогично могут быть получены формулы для нахождения корней $p_2, p_3, \ldots, p_n$:

$$p_2^{(m+1)} = p_2^{(m)} - P_1(p_2^{(m)}) \big/ P_1'(p_2^{(m)}) = p_2^{(m)} - C_1^{(m)} \big/ D_1^{(m)},$$

$$C_n = B_n, C_j^{(m)} = B_j^{(m)} + p_2^{(m)} C_{j+1}^{(m)}, \quad j = n-1, \ldots, 1;$$

$$D_1^{(m)} = C_n \cdot \left(p_2^{(m)}\right)^{n-2} + C_{n-1}^{(m)} \cdot \left(p_2^{(m)}\right)^{n-3} + \ldots + C_3^{(m)} \cdot \left(p_2^{(m)}\right) + C_2^{(m)} ;$$

$$p_3^{(m+1)} = p_3^{(m)} - P_2(p_3^{(m)}) \big/ P_2'(p_3^{(m)}) = p_3^{(m)} - D_2^{(m)} \big/ F_2^{(m)};$$

$$D_n = C_n, D_j^{(m)} = C_j^{(m)} + p_3^{(m)} D_{j+1}^{(m)}, \quad j = n-1, ..., 2;$$

$$F_2^{(m)} = D_n \cdot \left(p_3^{(m)}\right)^{n-3} + D_{n-1}^{(m)} \cdot \left(p_3^{(m)}\right)^{n-4} + ... + D_4^{(m)} \cdot \left(p_3^{(m)}\right) + D_3^{(m)};$$

$$p_4^{(m+1)} = p_4^{(m)} - P_3(p_4^{(m)}) \big/ P_3'(p_4^{(m)}) = p_4^{(m)} - F_3^{(m)} \big/ G_3^{(m)};$$

$$F_n = D_n, F_j^{(m)} = D_j^{(m)} + p_4^{(m)} F_{j+1}^{(m)}, \quad j = n-1, ..., 3;$$

$$G_3^{(m)} = F_n \cdot \left(p_4^{(m)}\right)^{n-4} + F_{n-1}^{(m)} \cdot \left(p_4^{(m)}\right)^{n-5} + ... + F_5^{(m)} \cdot \left(p_4^{(m)}\right) + F_4^{(m)};$$

$$p_5^{(m+1)} = p_5^{(m)} - P_4(p_5^{(m)}) \big/ P_4'(p_5^{(m)}) = p_5^{(m)} - G_4^{(m)} \big/ Q_4^{(m)};$$

$$G_n = F_n, \; G_j^{(m)} = F_j^{(m)} + p_5^{(m)} G_{j+1}^{(m)}, \; j = n-1, ..., 4;$$

$$Q_4^{(m)} = G_n \cdot \left(p_5^{(m)}\right)^{n-5} + G_{n-1}^{(m)} \cdot \left(p_5^{(m)}\right)^{n-6} + ... + G_6^{(m)} \cdot \left(p_5^{(m)}\right) + G_5^{(m)};$$

…………………………………………………………………

$$p_{n-2}^{(m+1)} = p_{n-2}^{(m)} - P_{n-3}(p_{n-2}^{(m)}) \big/ P_{n-3}'(p_{n-2}^{(m)}) = p_{n-2}^{(m)} - H_{n-3}^{(m)} \big/ S_{n-3}^{(m)};$$

$$H_n = L_n, H_j^{(m)} = L_j^{(m)} + p_{n-2}^{(m)} H_{j+1}^{(m)}, \; j = n-1, ..., n-3;$$

$$S_{n-3}^{(m)} = H_n \cdot \left(p_{n-2}^{(m)}\right)^2 + H_{n-1}^{(m)} \cdot \left(p_{n-2}^{(m)}\right) + H_{n-2}^{(m)};$$

$$p_{n-1}^{(m+1)} = p_{n-1}^{(m)} - P_{n-2}(p_{n-1}^{(m)}) \big/ P_{n-2}'(p_{n-1}^{(m)}) = p_{n-1}^{(m)} - S_{n-2}^{(m)} \big/ R_{n-2}^{(m)};$$

$$S_n = H_n, S_j^{(m)} = H_j^{(m)} + p_{n-1}^{(m)} S_{j+1}^{(m)}, \; j = n-1, n-2; \quad R_{n-2}^{(m)} = S_n \cdot \left(p_{n-1}^{(m)}\right) + S_{n-1}^{(m)};$$

$$p_n^{(m+1)} = p_n^{(m)} - P_{n-1}(p_n^{(m)}) \big/ P_{n-1}'(p_n^{(m)}) = p_n^{(m)} - R_{n-1}^{(m)} \big/ R_n;$$

$$R_n = S_n, R_{n-1}^{(m)} = S_{n-1}^{(m)} + p_n^{(m)} R_n.$$

Пример 4. Дан многочлен

$$P(p) = A_3 p^3 + A_2 p^2 + A_1 p + A_0,$$

где $A_3 = 1$; $A_2 = 20$; $A_1 = 1{,}01 \cdot 10^8$; $A_0 = 1{,}01 \cdot 10^9$.

Требуется найти действительный корень p_1 многочлена $P(p)$ по формуле (45).

Зададим первоначальное значение корня $p_1^{(1)} = 0$ и выполним первое приближение:

$$B_3 = A_3 = 1, \; B_2^{(1)} = A_2 + p_1^{(1)} B_3 = 20, B_1^{(1)} = A_1 + p_1^{(1)} B_2^{(1)} = 1{,}01 \cdot 10^8,$$

$$B_0^{(1)} = A_0 + p_1^{(1)} B_1^{(1)} = 1{,}01 \cdot 10^9;$$

$$C_0^{(1)} = B_3 \cdot \left(p_1^{(1)}\right)^2 + B_2^{(1)} \cdot \left(p_1^{(1)}\right) + B_1^{(1)} = 1{,}01 \cdot 10^8; \; p_1^{(2)} = p_1^{(1)} - \frac{B_0^{(1)}}{C_0^{(1)}} = -10.$$

Второе приближение дает:

$$B_3 = A_3 = 1, \; B_2^{(2)} = A_2 + p_1^{(2)} B_3 = 10, B_1^{(2)} = A_1 + p_1^{(2)} B_2^{(2)} = 1{,}00999 \cdot 10^8,$$

$$B_0^{(2)} = A_0 + p_1^{(2)} B_1^{(2)} = 1 \cdot 10^4;$$

$$C_0^{(2)} = B_3 \cdot \left(p_1^{(2)}\right)^2 + B_2^{(2)} \cdot \left(p_1^{(2)}\right) + B_1^{(2)} = 1{,}00999 \cdot 10^8;$$

$$p_1^{(3)} = p_1^{(2)} - \frac{B_0^{(2)}}{C_0^{(2)}} - 10{,}000099.$$

Выполняя третье приближение, получим:

$$B_3 = A_3 = 1,\ B_2^{(3)} = A_2 + p_1^{(3)} B_3 = 9{,}999901,$$

$$B_1^{(3)} = A_1 + p_1^{(3)} B_2^{(3)} = 1{,}00999 \cdot 10^8,\ B_0^{(3)} = A_0 + p_1^{(3)} B_1^{(3)} = 0;$$

$$C_0^{(3)} = 1{,}00999 \cdot 10^8; \quad p_1^{(4)} = p_1^{(3)} - \frac{B_0^{(3)}}{C_0^{(3)}} = -10{,}000099.$$

Результаты определения корня p_1 для второго и третьего приближений совпадают. Следовательно, можно принять $p_1 = -10.000099$. Точно такой же результат получен при определении действительного корня этого многочлена по точной формуле, выраженной через радикалы. Фактически корень был определен после первой итерации, что свидетельствует о хорошей сходимости вычислений по формуле (45).

Для формулы (45) справедливо утверждение: если последовательность $p_1^{(m+1)}$ сходится и $\lim\limits_{m \to \propto} p_1^{(m+1)} = p_1$, то p_1 есть корень многочлена $P(p)$. Это утверждение правомерно и для других итерационных формул, полученных выше.

Заключение

Таким образом, предложена простая и наглядная итерационная процедура нахождения корней многочленов степени *n*, основанная на выделении из многочленов квадратичных множителей. Приведенные примеры показывают хорошую сходимость вычислений. Фактически корни многочлена определяются после первых итераций. Предлагаемый метод удобен для использования в системах автоматизированного анализа и синтеза систем управления, электрических цепей и электронных устройств.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чье Ен Ун, Шеин А.Б.* Метод нахождения корней многочленов. I // Информатика и системы управления. – 2012. – № 4(34). – С. 88-96.
2. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1980.
3. *Мак-Кракен Д., Дорн У.* Численные методы и программирование на Фортране. – М.: Мир, 1977.
4. *Крылов В.И.*, *Бобков В.В*, *Монастырный П.И.* Вычислительные методы. – Т.2. – М.: Наука, 1976.
5. *В.И. Крутов, Ф.М. Данилов, П.К. Кузьмик и др.* Основы теории автоматического регулирования. – М.: Машиностроение, 1984.

E-mail:
Чье Ен Ун – chye@ais.khstu.ru;
Шеин Александр Борисович – chye@ais.khstu.ru.