



УДК 629.735.45; 519.876.5

© 2017 г. **А.Е. Барабанов¹**, д-р физ.-мат. наук,

М.Д. Самойлов¹,

Д.В. Ромаев¹,

Е.И. Николаев², канд. техн. наук

(¹Санкт-Петербургский государственный университет,

²Казанский национальный исследовательский технический университет
им. А. Н. Туполева)

АППРОКСИМАЦИЯ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ НЕСУЩЕГО ВИНТА С ОЦЕНКОЙ ПОГРЕШНОСТЕЙ*

Представлено моделирование махового движения несущего винта вертолета. Показано, что исходная аппроксимация не дает достаточных оснований для использования ее в аналитических методах. Сравнением результатов моделирования с аппроксимациями показано, что погрешность полученных аппроксимаций имеет второй порядок малости по отношению к моделируемым величинам. **Ключевые слова:** вертолет, несущий винт, лопасть, маховое движение, аппроксимация.

DOI: 10.22250/isu.2017.54.20-31

Введение

Моделирование несущего винта вертолета – достаточно сложный и трудоемкий процесс, и поэтому до сих пор авторы трудов по теории вертолета сильно упрощали многие уравнения динамики для построения реальных моделей. Однако в малогабаритных вертолетах (с диаметром винта меньше 1 м) скорость изменения параметров на порядок выше, и поэтому требуется повышенная точность моделирования.

В данной работе рассматривается частный случай конструкции несущего винта, где пара лопастей соединена с парой серволопатонок управляющим механизмом Белла – Хиллера.

* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 15-08-99619 и гранта СПбГУ 6.38.230.2015.

Уравнения движения лопастей и серволопатов весьма громоздки и сильно нелинейны, поэтому необходимо иметь достаточно точную алгебраическую аппроксимацию махового движения аналитическими методами. Они "похожи" на периодические и гармонические, поэтому решение данной задачи представлено в виде гармонической функции.

Теория аэродинамики вертолета уже рассматривалась в работах [1 – 3] более подробно эта тематика затрагивалась в статьях [4, 5].

Введение в аппроксимацию махового движения

Рассмотрим связанную систему координат вертолета, ось Oy которой совпадает с валом несущего винта и направлена вверх, а плоскость Oxz есть плоскость вращения несущего винта. Ось Ox направлена вперед вдоль конструктивной оси вертолета. Ось Oz направлена вправо. Вращение несущего винта в плоскости Oxz этой системы координат оказывается в отрицательном направлении.

Пусть $V = (V_x, V_y, V_z)$ – вектор скорости втулки вертолета относительно воздуха, выраженный в связанной системе координат вертолета. Пусть $V_{xz} = (V_x, V_z)$ – проекция этого вектора на горизонтальную плоскость. Тогда нормированная величина $|V_{xz}|/(\omega_0 R) = \mu$ есть режим полета μ , а угол, отсчитываемый в горизонтальной плоскости от луча Ox до V_{xz} в направлении от Ox на Oz – угол скольжения β_h .

Функции углов махового движения лопастей и серволопатов в установленном режиме движения могут быть с высокой точностью аппроксимированы гармоническими функциями [1]:

$$\beta \approx -\text{Re}(e^{-i\psi} a); \beta_g \approx -\text{Re}(e^{-i\psi_g} a_g).$$

До данной работы уже существовали аппроксимации махового движения несущего винта (см. [4, 5]), однако они не учитывали малые первого порядка.

Ранее в работе [5] получены следующие формулы.

Предложение 1.1 *Справедлива следующая аппроксимация коэффициента первой гармоники махового движения лопастей:*

$$a = \frac{1}{\Delta} \left[D_g - \bar{\Omega}_{xz} + \frac{8}{B^4 \gamma_*} i \bar{\Omega}_{xz} + \left(\frac{8}{3B} \phi_0 + \frac{2}{B^2} \lambda \right) \mu + (\bar{\Omega}_{xz} - 2D_\Theta \bar{\Omega}_y) \right],$$

где $\Delta = (1 + k_\gamma i) - \left(1 + \frac{8}{B^4 \gamma_*} i \right) \bar{\Omega}_y$.

Предложение 2.2. *Справедлива следующая аппроксимация коэффициента первой гармоники махового движения серволопатов:*

$$a_g = iD_u \Theta - \bar{\Omega}_{xz}^h + \frac{2}{\gamma_{*g} B_{4,g}} i \bar{\Omega}_{xz}^h + \frac{B_{2,g} \lambda \mu - \bar{\Omega}_y^h [4\gamma_{*g}^{-2} B_{4,g}^{-1} \bar{\Omega}_{xz}^h + (2\gamma_{*g}^{-1} + B_{4,g} i) D_u \Theta]}{B_{4,g} - \bar{\Omega}_y^h (B_{4,g} + 2\gamma_{*g}^{-1} i)}.$$

При сравнении с результатом моделирования получено, что погрешность аппроксимации махового движения серволопаток составляет около 10%. А так как маховое движение лопастей зависит от угла установки лопасти, алгебраическое выражение для которого содержит угол махового движения серволопатки [5], то аппроксимация первой гармоники махового движения лопастей имеет не меньшие погрешности.

Главные части в коэффициенте a_g

Пусть $\Omega = 0$, $\kappa_{z,g} = 0$, $\kappa_z = 0$, $\lambda = 0$. Выделим в уравнении махового движения серволопатки главную часть относительно малых величин ε_g :

$$\beta_g'' + \sin \beta_g \cos \beta_g = -B_{4,g} \frac{\rho b_g c_{y,g}^\alpha R^4}{i_{x,g}} \left\{ D_u \operatorname{Re}(e^{-i\psi_g} \Theta) + \beta_g'(\psi_g) + \frac{B_{2,g}}{B_{4,g}} [D_u \operatorname{Re}(e^{-i\psi_g} \Theta) \mu^2 \sin^2 \psi_g + \beta_g(\psi_g) \mu^2 \sin \psi_g \cos \psi_g] \right\}.$$

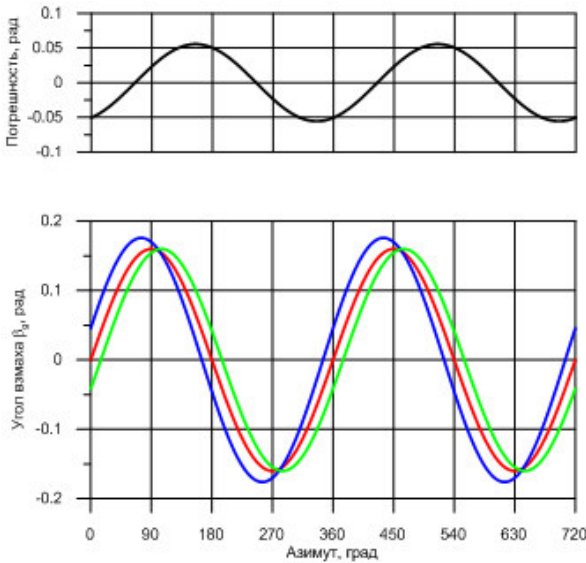


Рис. 1. Погрешность аппроксимации махового движения серволопаток.

что видно на графиках (рис. 1).

Отметим, что таких проблем нет в подсистеме лопастей, где второй и четвертый моменты близки к 1.

Порядки отброшенных слагаемых в левой и правой частях дифференциального уравнения одинаковы: $B_{4,g} \frac{\rho b_g c_{y,g}^\alpha R^4}{i_{x,g}} = 0.33$, где $i_{x,g} = 2I_{ГШ,g} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

В левой части уравнения уже отброшены слагаемые третьего порядка малости и выше при помощи подстановок первых членов в следующих разложениях:

$$\sin \beta_g = \beta_g - \frac{1}{6} \beta_g^3 + \mathcal{O}(|\beta_g|^5),$$

$$\cos \beta_g = 1 - \frac{1}{2} \beta_g^2 + \mathcal{O}(|\beta_g|^4).$$

Слагаемые, стоящие в квадратных скобках, имеют третий порядок малости и отброшены в приближенном вычислении a_g . Однако при этом не учтено, что дробь $B_{2,g}/B_{4,g} = 7.8$ добавляет один порядок. Поэтому исключенные слагаемые имеют порядок 10^{-1} по отношению к оставшимся,

В левой части отброшенные слагаемые третьего порядка имели коэффициенты $1/6$ и $1/2$ соответственно, что по порядку сравнимо с полученным значением 0.33 . Поэтому порядки величин в левой части и в правой части дифференциального уравнения одинаковы, и в правой части необходимо оставить слагаемые порядка 1 и 2.

Корректировка приближения a_g

Для определения коэффициента a_g выражение $\beta_g \approx -\text{Re}(e^{-i\psi_g} a_g)$ подставляется в дифференциальное уравнение

$$\beta_g'' + \sin \beta_g \cos \beta_g = \frac{1}{\omega_0^2 i_{x,g}} M_{x,g}^s,$$

из которого удаляются слагаемые высоких порядков малости и приравниваются коэффициенты при $e^{-i\psi_g}$:

$$\begin{aligned} -D_u \text{Re}(e^{-i\psi_g} \Theta)[B_{4,g}(1 - \overline{\Omega}_y^h)^2 + B_{2,g}\mu^2 \sin^2 \xi] + \\ + B_{4,g}(1 - \overline{\Omega}_y^h)[\text{Im}(e^{-i\psi_g} \Omega_{xz}^h) - \beta_g'(\psi_g)] + \\ + \mu B_{2,g} \sin \xi [\lambda - \mu \beta_g(\psi_g) \cos \xi] \approx 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\xi = \psi_g - \beta_h$.

Определим комплексное число $V_{xz} = V_x + iV_z$ и его нормированное значение $V_{xz} = V_{xz}/(\omega_0 R)$. Тогда

$$V_{xz} = \mu e^{i\beta_h} \text{ или } e^{-i\psi_g} V_{xz} = \mu e^{-i\xi}.$$

Подставим эти выражения в правую часть приближенного алгебраического уравнения (1):

$$\begin{aligned} \text{Re}(e^{-i\psi_g} \Theta)(\text{Im}(e^{-i\psi_g} V_{xz}))^2 = -\frac{1}{8} e^{-i\psi_g} [-2\Theta |V_{xz}|^2 + \Theta^* V_{xz}^2] + \dots, \\ \text{Im}(e^{-i\psi_g} V_{xz}) \text{Re}(e^{-i\psi_g} a_g) \text{Re}(e^{-i\psi_g} V_{xz}) = \frac{1}{8i} e^{-i\psi_g} a_g^* V_{xz}^2 + \dots. \end{aligned}$$

Приравняем к нулю множители при $e^{-i\psi_g}$ в последнем уравнении и выполним операцию комплексного сопряжения полученного уравнения:

$$\begin{aligned} 4B_{4,g}(1 - \overline{\Omega}_y^h) a_g^* - B_{2,g}(V_{xz}^*)^2 a_g = -4i D_u B_{4,g}(1 - \overline{\Omega}_y^h)^2 \Theta^* - \\ - i B_{2,g} D_u (2\Theta^* |V_{xz}|^2 - \Theta(V_{xz}^*)^2) - 4B_{4,g}(1 - \overline{\Omega}_y^h)(\Omega_{xz}^h)^* + 4B_{2,g} \lambda V_{xz}^*. \end{aligned}$$

Получили систему из двух уравнений относительно переменных a_g и a_g^* , которую можно решить, не обращая внимания на то, что эти переменные связаны между собой.

Определитель матрицы коэффициентов системы равен:

$$\Delta = 16B_{4,g}^2 (1 - \overline{\Omega}_y^h)^2 - B_{2,g}^2 |V_{xz}|^4.$$

Определитель, относящийся к a_g , равен:

$$\begin{aligned} \Delta_{a_g} = & 16iD_u B_{4,g}^2 (1 - \overline{\Omega}_y^h)^3 \Theta + 4iB_{2,g} B_{4,g} D_u (1 - \overline{\Omega}_y^h) (2\Theta |V_{xz}|^2 - \Theta^* V_{xz}^2) - \\ & - 16B_{4,g}^2 (1 - \overline{\Omega}_y^h)^2 \Omega_{xz}^h + 16B_{2,g} B_{4,g} (1 - \overline{\Omega}_y^h) \lambda V_{xz} - \\ & - 4iD_u B_{2,g} B_{4,g} (1 - \overline{\Omega}_y^h)^2 \Theta^* V_{xz}^2 - iB_{2,g}^2 D_u |V_{xz}|^2 (2\Theta^* V_{xz}^2 - \Theta |V_{xz}|^2) - \\ & - 4B_{2,g} B_{4,g} (1 - \overline{\Omega}_y^h) (\Omega_{xz}^h)^* V_{xz}^2 + 4B_{2,g}^2 \lambda |V_{xz}|^2 V_{xz}. \end{aligned}$$

Введем параметр $\nu = \frac{B_{2,g}}{4B_{4,g}} = 1.94$ (для вертолета Walkera) и получим при-

ближенную главную часть, содержащую слагаемые первого и второго порядка малости: $a_g \approx iD_u (1 - \overline{\Omega}_y^h) \Theta - \Omega_{xz}^h + 4\nu [\lambda + D_u \text{Im}(\Theta^* V_{xz})] V_{xz} - \nu (\Omega_{xz}^h)^* V_{xz}^2$.

Добавление угловых скоростей в инерциальную часть

Пусть $\kappa_{xz,g} = 0$ и $\kappa_{z,g} = 0$. Рассмотрим общий вид уравнения движения серволопаток:

$$\beta_g'' + \sin \beta_g \cos \beta_g - 2\overline{\Omega}_{z,g}^b \cos \beta_g - (\overline{\Omega}'_{x,g})^b + \overline{\Omega}_{y,g}^b \overline{\Omega}_{z,g}^b = \frac{1}{\omega_0^2 i_{x,g}} M_g(\psi_g).$$

Выделим в инерциальной части слагаемые второго и третьего порядков, а в них коэффициент при $e^{-i\psi_g}$. В разложении

$$\sin \beta_g \cos \beta_g = \frac{1}{2} \sin 2\beta_g = \beta_g - \frac{2}{3} \beta_g^3 + O(\beta_g^5)$$

оставим только первые два слагаемых. Подставим в кубический член функцию $\beta_g = -\text{Re}(e^{-i\psi_g} a_g)$ и выделим слагаемые при $e^{-i\psi_g}$:

$$\frac{2}{3} \beta_g^3 = -\frac{1}{12} (e^{-i\psi_g} a_g + e^{i\psi_g} a_g^*)^3 = -\frac{1}{4} e^{-i\psi_g} a_g |a_g|^2 + \dots$$

Найдем коэффициенты при $e^{-i\psi_g}$ в слагаемых, содержащих Ω . Для этого выразим явно вектор Ω^b через вектор Ω^h , не зависящий от серволопаток:

$$\overline{\Omega}_g^b = W_g^T V_g^T \overline{\Omega}^h = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \beta_g \\ \sin \beta_g \end{pmatrix} \overline{\Omega}_y^h + \text{Re} \left[\begin{pmatrix} -i \\ \sin \beta_g \\ -\cos \beta_g \end{pmatrix} e^{-i\psi_g} \Omega_{xz}^h \right],$$

и аналогично для $(\overline{\Omega}')_g^b$. В дальнейшем для краткости: $\overline{\Omega}_y = \overline{\Omega}_y^h$, $\Omega_{xz} = \Omega_{xz}^h$.

Величина β_g и безразмерные компоненты вектора $\overline{\Omega}$ имеют первый порядок малости, обычно в пределах 0.1–0.15. Компоненты вектора $\overline{\Omega}'$ имеют второй порядок малости. В формулах достаточно оставить слагаемые не выше треть-

его порядка малости:

$$\begin{aligned}(\bar{\Omega}')_{x,g}^b &= -\frac{1}{2}i\Omega'_{xz} e^{-i\psi_g} + \dots, \\ \bar{\Omega}_{z,g}^b \cos \beta_g &= e^{-i\psi_g} \left[-\frac{1}{2}\Omega_{xz} - \frac{1}{2}a_g \bar{\Omega}_y + \frac{1}{8}(2|a_g|^2 \Omega_{xz} + a_g^2 \Omega_{xz}^*) \right] + \dots, \\ \bar{\Omega}_{y,g}^b \bar{\Omega}_{z,g}^b &\approx e^{-i\psi_g} \left[-\frac{1}{2}\bar{\Omega}_y \Omega_{xz} - \frac{1}{2}\bar{\Omega}_y^2 a_g + \frac{1}{8}(2|\Omega_{xz}|^2 a_g + \Omega_{xz}^2 a_g^*) \right] + \dots.\end{aligned}$$

Таким образом, инерциальная часть уравнения махового движения серволопаток имеет следующие коэффициенты при $e^{-i\psi_g}$:

$$\begin{aligned}\beta_g'' + \sin \beta_g \cos \beta_g - 2\bar{\Omega}_{z,g}^b \cos \beta_g - (\bar{\Omega}')_{x,g}^b + \bar{\Omega}_{y,g}^b \bar{\Omega}_{z,g}^b &\approx \\ \approx -\frac{1}{2}\bar{\Omega}_y \Omega_{xz} - \frac{1}{2}\bar{\Omega}_y^2 a_g + \frac{1}{8}(2|\Omega_{xz}|^2 a_g + \Omega_{xz}^2 a_g^*) &+ \dots.\end{aligned}$$

Выше было показано, что в правой части дифференциального уравнения коэффициенты при той же гармонике имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{M_g(\psi_g)}{\omega_0^2 i_{x,g}} &= \frac{1}{2}\kappa_g e^{-i\psi_g} \left[-D_u(1 - \bar{\Omega}_y)^2 \Theta - \nu D_u(2\Theta |V_{xz}|^2 - \Theta^* V_{xz}^2) - \right. \\ &\left. - i(1 - \bar{\Omega}_y)(\Omega_{xz} + a_g) + 4\nu i \lambda V_{xz} + \nu i a_g^* V_{xz}^2 \right] + \dots,\end{aligned}$$

где введены безразмерные величины

$$D_u = 1.5, \quad \kappa_g = B_{4,g} \frac{\rho b_g c_{y,g}^\alpha R^4}{i_{x,g}} = 0.335.$$

Получим алгебраическое уравнение относительно комплексного числа a_g вида

$$p a_g + q a_g^* + r + d_1 |a_g|^2 + d_2 a_g^2 + d_3 a_g |a_g|^2 = 0, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned}p &= 1 - \bar{\Omega}_y - \frac{1}{2}i\kappa_g^{-1} |\Omega_{xz}|^2 - 2i\kappa_g^{-1} \bar{\Omega}_y + i\kappa_g^{-1} \bar{\Omega}_y^2, \quad q = -\frac{1}{4}i\kappa_g^{-1} \Omega_{xz}^2 - \nu V_{xz}^2; \\ r &= \Omega_{xz}(1 - \bar{\Omega}_y) - iD_u(1 - \bar{\Omega}_y)^2 \Theta + i\nu D_u V_{xz}^2 \Theta^* - 4\nu \lambda V_{xz} - 2iD_u \nu \Theta |V_{xz}|^2 \\ &- 2i\kappa_g^{-1} \Omega_{xz} + \kappa_g^{-1} \Omega'_{xz} + i\kappa_g^{-1} \bar{\Omega}_y \Omega_{xz}, \quad d_1 = i\kappa_g^{-1} \Omega_{xz}, \quad d_2 = \frac{1}{2}i\kappa_g^{-1} \Omega_{xz}^*, \quad d_3 = -\frac{1}{2}i\kappa_g^{-1}.\end{aligned}$$

Линейное приближение a_g

Вычислим начальное приближение z к числу a_g как корень линейной части уравнения:

$$pz + qz^* + r = 0. \quad (3)$$

Корень этого линейного уравнения обозначим z_0 . Он равен

$$z_0 = \frac{qr^* - p^*r}{|p|^2 - |q|^2}.$$

Определим следующие максимальные значения для параметров:

$$\begin{aligned}
|V_{xz}| \leq 0.1, \quad |\Theta| \leq 0.3, \quad |\lambda| \leq 0.05, \quad |\bar{\Omega}_y| \leq 0.03, \quad |\Omega_{xz}| \leq 0.1, \quad |\Omega'_{xz}| \leq 0.01, \\
|2\kappa_g^{-1}\bar{\Omega}_y| \leq 0.18, |\bar{\Omega}_y| \leq 0.03, \frac{1}{2}\kappa_g^{-1}|\Omega_{xz}|^2 \leq 0.015, \kappa_g^{-1}\bar{\Omega}_y^2 \leq 0.0027, \\
\nu|V_{xz}|^2 \leq 0.02, \quad \frac{1}{4}\kappa_g^{-1}|\Omega_{xz}|^2 \leq 0.0075, \\
2\kappa_g^{-1}|\Omega_{xz}| \leq 0.6, \quad D_u|\Theta| \leq 0.45, \quad |\Omega_{xz}| \leq 0.1, \quad 4\nu|\lambda V_{xz}| \leq 0.04, \\
\kappa_g^{-1}|\Omega'_{xz}| \leq 0.03, \quad 2D_u|\bar{\Omega}_y\Theta| \leq 0.027, \quad 2\nu D_u|\Theta||V_{xz}|^2 \leq 0.012, \\
\kappa_g^{-1}|\bar{\Omega}_y\Omega_{xz}| \leq 0.009, \quad \nu D_u|\Theta||V_{xz}|^2 \leq 0.0059, \quad \bar{\Omega}_y|\Omega_{xz}| \leq 0.003.
\end{aligned}$$

В числителе выражения z_0 оставим слагаемые максимальное значение которых больше 0.001, а в его знаменателе – у которых максимум больше 0.01.

Окончательно главная часть решения z_0 имеет вид

$$\begin{aligned}
z_0 \approx (qr^* - p^*r)(1 + 2\bar{\Omega}_y - 4\kappa_g^{-2}\bar{\Omega}_y^2) \approx D_u\Theta \left\{ i + 2i\nu|V_{xz}|^2 - \frac{1}{2}\kappa_g^{-1}|\Omega_{xz}|^2 + \right. \\
+ \bar{\Omega}_y[-i - 2\kappa_g^{-1} + 4\nu|V_{xz}|^2(i - \kappa_g^{-1}) - 2i\kappa_g^{-2}|\Omega_{xz}|^2] + \bar{\Omega}_y^2(\kappa_g^{-1} - 4i\kappa_g^{-2}) + \\
+ \bar{\Omega}_y^3(12i\kappa_g^{-2} + 8\kappa_g^{-3}) \left. \right\} + D_u\Theta^* \left\{ 2\nu V_{xz}^2(-i + \kappa_g^{-1}\bar{\Omega}_y) + \frac{1}{4}\kappa_g^{-1}\Omega_{xz}^2 \right\} + \\
+ \Omega_{xz} \left\{ -1 + 2i\kappa_g^{-1}(1 + 2i\kappa_g^{-1}\bar{\Omega}_y)(1 - 4\kappa_g^{-2}\bar{\Omega}_y^2) - \left(\frac{1}{2}\kappa_g^{-2} + \frac{3}{4}i\kappa_g^{-1} + 4i\kappa_g^{-3}\bar{\Omega}_y \right) |\Omega_{xz}|^2 + \right. \\
+ i\kappa_g^{-1}\bar{\Omega}_y(-1 + 20\kappa_g^{-2}\bar{\Omega}_y^2) \left. \right\} + \kappa_g^{-1}\Omega'_{xz} \left\{ -1 - 2i\kappa_g^{-1}\bar{\Omega}_y - 2\bar{\Omega}_y + 4\kappa_g^{-2}\bar{\Omega}_y^2 \right\} - \\
- \nu(1 + 2i\kappa_g^{-1})V_{xz}^2\Omega_{xz}^* + 4\nu\lambda V_{xz} \left\{ 1 + 2i\kappa_g^{-1}\bar{\Omega}_y - 4\kappa_g^{-2}\bar{\Omega}_y^2 + \bar{\Omega}_y \right\}.
\end{aligned}$$

В частном случае, когда $\Omega_y = 0$, это решение упрощается:

$$\begin{aligned}
z_0 \approx iD_u\Theta + (2i\kappa_g^{-1} - 1)\Omega_{xz} + 4\nu\lambda V_{xz} + \\
+ D_u\Theta \left\{ 2i\nu|V_{xz}|^2 - \frac{1}{2}\kappa_g^{-1}|\Omega_{xz}|^2 \right\} + D_u\Theta^* \left\{ -2i\nu V_{xz}^2 + \frac{1}{4}\kappa_g^{-1}\Omega_{xz}^2 \right\} - \\
- \left(\frac{1}{2}\kappa_g^{-2} + \frac{3}{4}i\kappa_g^{-1} \right) |\Omega_{xz}|^2 \Omega_{xz} - \kappa_g^{-1}\Omega'_{xz} - \nu(1 + 2i\kappa_g^{-1})V_{xz}^2\Omega_{xz}^*.
\end{aligned}$$

В этом выражении первая строка содержит главную часть, а остальные две – корректирующие добавки, которыми нельзя полностью пренебрегать.

Первая итерация метода Ньютона

Требуется найти приближенное значение корня уравнения (2). Главная часть кубической функции в левой части уравнения сосредоточена в линейном слагаемом.

Для произвольного комплексного числа x левую часть уравнения (2) обозначим:

$$f(x) = px + qx^* + r + d_1|x|^2 + d_2x^2 + d_3x|x|^2.$$

Начальной точкой выберем z_0 .

Первая итерация метода Ньютона в точке состоит в замене исходного нелинейного уравнения на линейное относительно h_0 для дифференциала

$$f(z_0) + df_{z_0}(h_0) = 0.$$

Выполним одну итерацию по методу Ньютона. Линейное уравнение для h_0 запишем в стандартной форме

$$a_0 h_0 + b_0 h_0^* = c_0,$$

где

$$a_0 = p + d_1 z_0^* + 2d_2 z_0 + 2d_3 |z_0|^2, \quad b_0 = q + d_1 z_0 + d_3 z_0^2, \\ c_0 = -d_1 |z_0|^2 - d_2 z_0^2 - d_3 z_0 |z_0|^2.$$

Для решения напишем само уравнение и **комплексно сопряженное** уравнение:

$$a_0 h_0 + b_0 h_0^* = c_0, \\ b_0^* h_0 + a_0^* h_0^* = c_0^*.$$

Эта система имеет решение

$$h_0 = \frac{a_0^* c_0 - b_0 c_0^*}{|a_0|^2 - |b_0|^2},$$

$$z = z_0 - \Omega_{xz}, \quad b_0 = \frac{1}{4} i \kappa_g^{-1} \Omega_{xz}^2 - \nu V_{xz}^2 - \frac{1}{2} i \kappa_g^{-1} z^2, \\ c_0 = \frac{1}{2} i \kappa_g^{-1} [z |z|^2 - z^* \Omega_{xz}^2 - 2z |\Omega_{xz}|^2 - 2\Omega_{xz} |\Omega_{xz}|^2].$$

В выражении для знаменателя $|a_0|^2 - |b_0|^2$ оставим только слагаемые, превосходящие по модулю 0.01, а для числителя – слагаемые, превосходящие по модулю 0.001. При этом оценим $|z| \leq 0.6$.

$$|a_0|^2 - |b_0|^2 \approx 1 + \kappa_g^{-2} \left[\frac{3}{4} |z|^4 + 4\overline{\Omega}_y |z|^2 \right] - 2\overline{\Omega}_y - \\ - \nu \kappa_g^{-1} \operatorname{Re} [iz^2 (V_{xz}^*)^2] + \kappa_g^{-2} [4\overline{\Omega}_y^2 - |z|^2 |\Omega_{xz}|^2], \\ a_0^* c_0 - b_0 c_0^* \approx \frac{1}{2} i \kappa_g^{-1} z |z|^2 - \frac{1}{4} \kappa_g^{-2} z |z|^4 \\ - \frac{1}{2} i \kappa_g^{-1} \left[z^* \Omega_{xz}^2 + 2z |\Omega_{xz}|^2 + 2\Omega_{xz} |\Omega_{xz}|^2 + \overline{\Omega}_y z |z|^2 + \nu z^* |z|^2 V_{xz}^2 \right] \\ + \kappa_g^{-2} \left[\frac{3}{8} z^* |z|^2 \Omega_{xz}^2 + \frac{3}{4} z |z|^2 |\Omega_{xz}|^2 + |z|^2 \Omega_{xz} |\Omega_{xz}|^2 - \frac{1}{2} z^2 \Omega_{xz}^* |\Omega_{xz}|^2 - \overline{\Omega}_y z |z|^2 \right].$$

В частности, корректирующая добавка первой итерации метода Ньютона при $V = 0$ и $\Omega = 0$ равна

$$\hat{h}_0 = \frac{\frac{1}{2} i \kappa_g^{-1} - \frac{1}{4} \kappa_g^{-2} |z|^2}{1 + \frac{3}{4} \kappa_g^{-2} |z|^4} z |z|^2.$$

Это главная часть приращения h_0 в общем случае. Ее максимальное значение не превосходит 0.2. Введем обозначение для неотрицательного числа $w = \kappa_g^{-1} |z|^2$ с максимальным модулем 1.1. Тогда

$$\hat{h}_0 = \frac{2i - w}{4 + 3w^2} wz.$$

Результатом первой итерации является комплексное число $z_1 = z_0 + h_0$.

Вторая итерация

Пусть z_2 есть результат второй итерации метода Ньютона решения уравнения $f(x) = 0$:

$$z_2 = z_1 + h_1 = z_0 + h_0 + h_1,$$

где h_1 – приближенный корень уравнения $f(z_1) + df_{z_1}(h_1) \approx 0$.

Упростим выражение для $f(z_1)$ и вычислим главную часть. В следующем преобразовании подставлены определения a_0, b_0, c_0 , а также выражения для определения z_0 и h_0 :

$$\begin{aligned} f(z_1) &= p(z_0 + h_0) + q(z_0^* + h_0^*) + r + d_1(|z_0|^2 + z_0^*h_0 + z_0h_0^* + |h_0|^2) + \\ &+ d_2(z_0^2 + 2z_0h_0 + h_0^2) + d_3(z_0|z_0|^2 + z_0^2h_0^* + 2|z_0|^2h_0 + 2z_0|h_0|^2 + z_0^*h_0^2 + h_0|h_0|^2) = \\ &= (d_1|z_0|^2 + d_2z_0^2 + d_3z_0|z_0|^2) + (p + d_1z_0^* + 2d_2z_0 + 2|z_0|^2)h_0 + \\ &+ (q + d_1z_0 + d_3z_0^2)h_0^* + d_1|h_0|^2 + d_2h_0^2 + d_3(2z_0|h_0|^2 + z_0^*h_0^2 + h_0|h_0|^2) = \\ &= -c_0 + a_0h_0 + b_0h_0^* + (d_1 + 2d_3z_0)|h_0|^2 + (d_2 + d_3z_0^*)h_0^2 + d_3h_0|h_0|^2 = \\ &= (d_1 + 2d_3z_0)|h_0|^2 + (d_2 + d_3z_0^*)h_0^2 + d_3h_0|h_0|^2. \end{aligned}$$

Коэффициенты можно преобразовать с подстановкой обозначения

$$z = z_0 - \Omega_{xz}, \text{ т.е. } d_1 + 2d_3z_0 = -i\kappa_g^{-1}z, \quad d_2 + d_3z_0^* = -\frac{1}{2}i\kappa_g^{-1}z^*.$$

Далее заменим h_0 на главное значение \hat{h}_0 : $f(z_1) \approx -\frac{1}{2}i\kappa_g^{-1}\hat{h}_0(2\hat{h}_0^*z + \hat{h}_0z^* + |\hat{h}_0|^2)$.

Последнее выражение в скобках упрощается подстановкой \hat{h}_0 по определению:

$$2\hat{h}_0^*z + \hat{h}_0z^* + |\hat{h}_0|^2 = -\frac{w|z|^2}{(4 + 3w^2)^2} [2i(4 + 3w^2) + 8w(1 + w^2)].$$

Подставим полученное выражение в формулу для $f(z_1)$:

$$f(z_1) \approx -\frac{w^3z}{(4 + 3w^2)^3} [i(4w^4 + 10w^2 + 8) + w(5w^2 + 4)].$$

Запишем линейное уравнение для определения h_1 в стандартной форме

$$a_1h_1 + b_1h_1^* = c_1,$$

где $a_1 = p + d_1z_1^* + 2d_2z_1 + 2d_3|z_1|^2$, $b_1 = q + d_1z_1 + d_3z_1^2$, $c_1 = -f(z_1)$.

Оно имеет решение

$$h_1 = \frac{a_1^* c_1 - b_1 c_1^*}{|a_1|^2 - |b_1|^2}.$$

Главные части в a_1 и b_1 – те же, что и в a_0 и b_0 : $a_1 \approx 1 - iw, b_1 \approx -\frac{1}{2}ik_g^{-1}z^2$.

Поэтому

$$|a_1|^2 - |b_1|^2 \approx (1 + \frac{3}{4}w^2), a_1^* c_1 - b_1 c_1^* \approx \frac{w^3 z}{(4 + 3w^2)^3} \left[-2w^5 + i \left(\frac{23}{2}w^4 + 16w^2 + 8 \right) \right].$$

Окончательно:

$$h_1 = \frac{2w^3 z}{(4 + 3w^2)^4} \left[-4w^5 + i(23w^4 + 32w^2 + 16) \right].$$

Итак, алгоритм оценивания из двух итераций по методу Ньютона состоит в корректировке начального приближения z_0 величинами h_0 и h_1 . Явная формула для расчета h_0 была получена в данном разделе при помощи переменной $z = z_0 - \Omega_{xz}$, а для расчета h_1 введена вторая вспомогательная переменная – $w = \kappa_g^{-1} |z|^2$.

Приняты следующие обозначения: ρ – плотность воздуха; Ω – угловая скорость вертолета; V – линейная скорость вертолета; b – хорда лопасти; ω – угловая скорость вращения несущего винта; R – радиус лопасти; ϕ_0 – общий шаг лопасти; c_y^α – производная коэффициента подъемной силы лопасти по углу атаки; I_h – момент инерции лопасти относительно втулки; B – коэффициент концевых потерь; λ – коэффициент протекания потока через винт; θ_1, θ_2 – циклический шаг лопасти; a_1, b_1, a_{g1}, b_{g1} – коэффициенты махового движения лопастей и сервролопатонок; k_e – коэффициент упругого момента лопасти; $r_{1,g}, r_{2,g}$ – радиусы начала и конца сервролопатонок; D_θ, D_u, D_g – коэффициенты пересчета угла наклона тарелки автомата перекоса на угол установки лопасти, сервролопатки и наклона сервролопатонок на угол установки лопасти; γ_*, γ_{*g} – массовые характеристики лопасти и сервролопатки; $\bar{V} = V/(\omega R)$ – относительная скорость воздушного потока,

$$B_{1,g} = \frac{r_{2,g}^2 - r_{1,g}^2}{2R^2}, B_{2,g} = \frac{r_{2,g}^4 - r_{1,g}^4}{4R^4}, \gamma_* = \frac{\rho b c_y^\alpha R^4}{2I_h}, k_\gamma = \frac{4k_e}{\rho b c_y^\alpha \omega^2 R^4 B^4}.$$

Результаты

До 1-й коррекции величина $0 z$ дает огромную погрешность в 50%.

После первой итерации метода Ньютона и коррекции на h_0 погрешность уменьшается до значения около 10% (рис. 2). Наконец, вторая итерация дает зна-

чение погрешности в 1% (рис. 3) даже при огромных угловых скоростях вертолета в земной системе порядка 2 рад/с .

На рис. 3 явно видна третья гармоника, а это значит, что погрешность вычисления первой гармоники практически полностью исключена, что означает достижение цели работы.

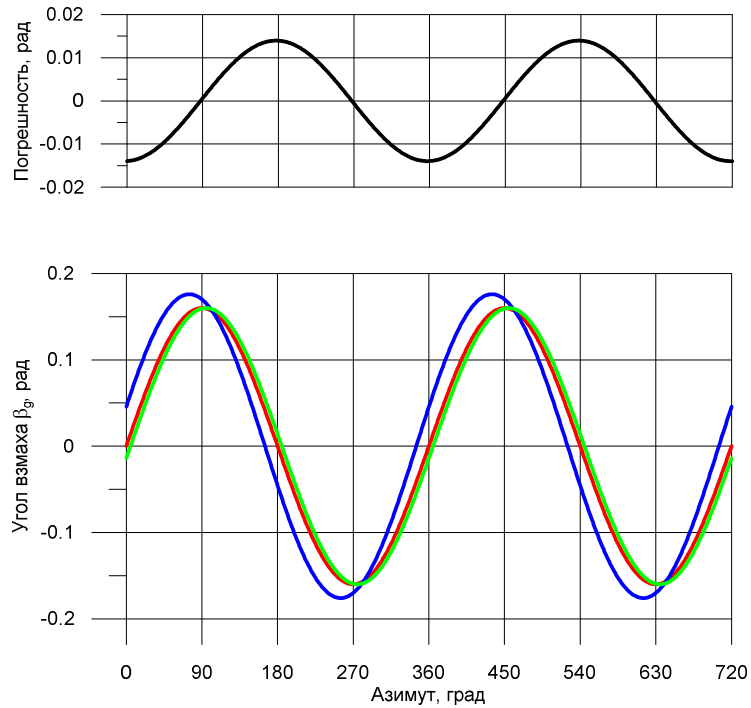


Рис. 2. Погрешность после 1-й итерации и коррекции на h_0 .

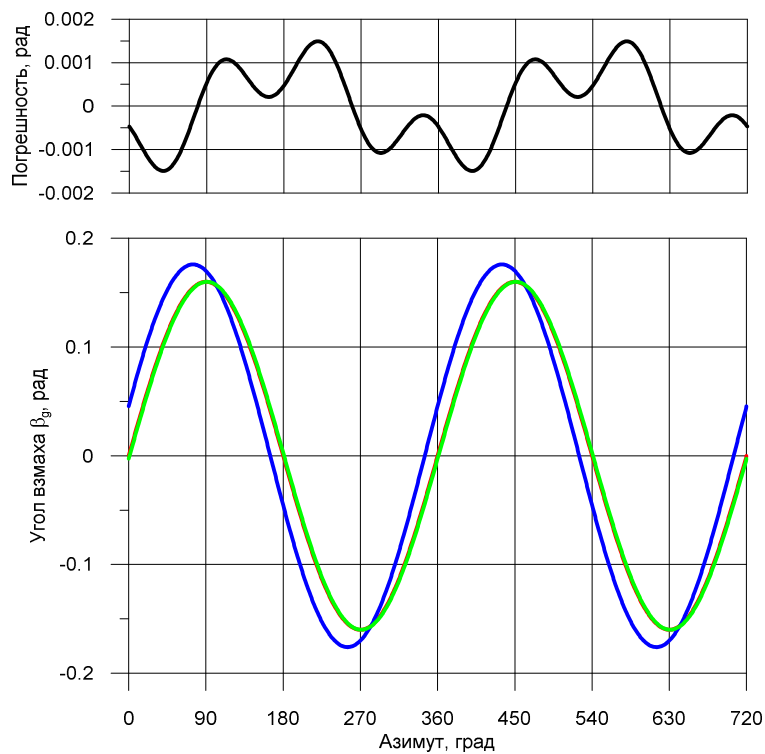


Рис. 3. Погрешность после 2-й итерации и коррекции на h_0, h_1 .

Заключение

В результате проделанной работы было смоделировано маховое движение несущего винта вертолета. Было получено, что исходная аппроксимация не дает достаточных оснований для использования ее в аналитических методах исследования динамики вертолета, так как имеет погрешность первого порядка относительно моделируемой величины. Исходя из уравнения модели, были построены более точные аппроксимации махового движения лопастей и серволопатонок. Эти аппроксимации имеют вид гармонических функций, для которых были получены достаточно точные выражения амплитуд. При сравнении результатов моделирования с аппроксимациями стало известно, что погрешность данных аппроксимаций имеет второй порядок малости по отношению к моделируемым величинам.

При исследовании динамики вертолета полученные результаты позволяют обоснованно переходить от громоздких нелинейных динамических систем к простым гармоническим функциям с известными параметрами, что значительно упрощает будущие исследования в данной области.

ЛИТЕРАТУРА

1. Миль М.Л., Некрасов А.В. Вертолеты. Расчет и проектирование. Аэродинамика. М., Машиностроение, 1966.
2. Володко А.М. Основы летной эксплуатации вертолетов. Аэродинамика. – М.; Транспорт, 1984.
3. Johnson W. Helicopter theory. – Princeton Univ. Press, 1980.
4. Barabanov A.E., Romaev D.V. Helicopter Modeling and Autopilot Design // Proc. of the 18th IFACWorld Congress. – Milan, Italy, 2011. – P.3015-3020.
5. Barabanov A.E. Modeling of dynamics of the Hiller hub for small helicopter // Proc. of the 1st IFAC Conferense of Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems. Saint Petersburg, Russia, 2015. – P. 6-40.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Фрадковым.

E-mail:

Барабанов Андрей Евгеньевич – andrey.barabanov@gmail.com;

Самойлов Максим Денисович – samoylov.md@gmail.com;

Ромаев Дмитрий Владимирович – romaev@yandex.ru;

Николаев Евгений Иванович – nikjhon@yandex.ru.