УДК 519.248:62-192

© 2018 г. **О.В. Абрамов**, д-р техн. наук,
(Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток),
Г.Ш. Цициашвили, д-р физ.-мат. наук
(Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток)

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ОТКАЗА КОНТРОЛИРУЕМОЙ ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ*

Рассматривается задача прогнозирования момента отказа технической системы при условии линейного убывания с течением времени запаса ее работоспособности по измерениям этого запаса (с ошибками) в отдельные моменты времени. Для решения этой задачи используются классические алгоритмы метода одномерного линейного регрессионного анализа.

Ключевые слова: техногенный риск, надежность, параметр, запас работоспособности, прогноз, случайный процесс, сложная техническая система, регрессионный анализ.

DOI: 10.22250/isu.2018.57.42-49

Введение

Наблюдаемый в последние годы высокий уровень чрезвычайных ситуаций техногенного характера делает актуальным решение целого ряда новых задач теории рисков [1]. Проблема снижения техногенных рисков приобретает особую актуальность применительно к техническим объектам ответственного назначения, отказы которых связаны с большими материальными потерями или катастрофическими последствиями. В большинстве своем это сложные системы, изготовляемые в небольшом числе экземпляров, эксплуатирующиеся в отличающихся условиях и реализующие экстремальные технологии. Такие технические системы обычно называют уникальными (УТС). Риск обычно связывают с наступлением некоторого, вообще говоря, случайного события, которое называют рисковым со-

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта ДВО РАН программы "Дальний Восток", (проект № 18-5-044).

бытием из возможного семейства событий, описывающих рисковую ситуацию.

При исследовании техногенных рисков в качестве рискового события рассматривается потеря работоспособности (отказ) технической системы, характеристиками которого является наработка (время безотказной работы) или момент отказа. Их вероятностные характеристики определяются обычно методами математической статистики и теории надежности. К сожалению, при исследовании УТС ответственного назначения получить достаточно представительную статистику отказов не представляется возможным. Это связано с тем, что такие отказы являются редкими событиями. Больше того, задача состоит не в накоплении статистики отказов, а в их предотвращении. В этих условиях перспективным при решении задачи управления техногенными рисками может стать использование идей функционально-параметрического направления (ФП-подхода) теории техногенных рисков [2].

В соответствии с методологией функционально-параметрического направления теории техногенных рисков процесс функционирования системы и ее техническое состояние в любой момент времени определяются конечным набором некоторых переменных – параметров системы, а все отказы (рисковые события) есть следствие отклонений параметров от их исходных (номинальных, расчетных) значений [2 – 4]. Формой проявления отказа является выход параметров состояния технической системы за пределы области допустимых значений (области работоспособности), при этом возникают задачи оценки (прогнозирования) момента наступления рискового события и принятия управленческих решений (прекращения эксплуатации или проведения профилактических коррекций параметров).

В данной работе предлагаются некоторые решения проблемы оценки и прогнозирования техногенных рисков, возникающих в процессе эксплуатации сложных технических систем ответственного назначения. Полученные решения базируются на идеях регрессионного анализа.

Рассматривается задача прогнозирования момента отказа технической системы при условии линейного убывания запаса ее работоспособности с течением времени эксплуатации по измерениям этого запаса в отдельные моменты времени. Измерения проводятся с некоторой, в общем случае случайной, ошибкой.

Задача решается при двух альтернативных режимах измерения запаса работоспособности системы:

а) достаточно частом, практически в режиме реального времени,

б) достаточно редком, – например, в тех случаях, когда такие измерения являются дорогостоящими или сложными в своей реализации.

Для решения этих задач используется классический алгоритм одномерного линейного регрессионного анализа. Строятся доверительные интервалы момента времени, когда запас работоспособности системы достигает критического значения. Этот момент будет далее отождествляться с моментом наступления возможного отказа системы (рискового события). Однако в случае а) такие интервалы могут быть сравнительно небольшими, а в случае б) – значительными. Поэтому, когда число точек контроля параметров технического состояния (запаса работоспособности) мало, для оценки момента наступления отказа вместо построения доверительных интервалов можно использовать метод bootstrap или методы, основанные на идеях минимаксного (гарантирующего) подхода.

Прогнозирование по одномерной линейной регрессионной модели

Пусть $a < 0$ – коэффициент линейной регрессионной функции, $b > 0$ – свободный член, случайные величины $\varepsilon(t)$, $0 \le t < \infty$ независимы, имеют нормальное распределение $N(0, \sigma^2)$ со средним 0 и дисперсией σ^2. Считается, что коэффициенты a, b линейной функции регрессии нам неизвестны. Наиболее простое решение данная задача получает, если дисперсия σ^2 известна. В случае если дисперсия случайной ошибки наблюдения неизвестна, приходится искать ее статическую оценку по имеющимся наблюдениям.

Рассмотрим следующую линейную регрессионную модель $x(t) = y(t) + \varepsilon(t)$, $y(t) = at + b$. *Функция* $y(t)$ *характеризует изменение (уменьшение) запаса работоспособности технической системы в процессе эксплуатации, поэтому* $a < 0$, $b > 0$. *Нашей задачей является оценка момента* T*, когда* $y(t) = Y$*, где* Y *– критический (минимально допустимый) уровень запаса работоспособности системы.*

Предположим, что в заданные моменты времени $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} t_k / n$, производится оценка запаса работоспособности (измеряются значения $y(t_1)$,..., $y(t_n)$ со случайными ошибками ε_1, ... , ε_n). Иными словами, заданы значения $x_1 = y(t_1) + \varepsilon_1, \ldots, x_n = y(t_n) + \varepsilon_n$ и по ним следует построить доверительный интервал момента наступления рискового события T, т.е. такого момента, когда запас работоспособности снизится до минимально допустимого уровня: $y(t) = Y$.

Для решения этой задачи сделаем замену переменной $\tilde{t} = t - T_n$ и определим линейную функцию $\tilde{y}(t) = y(t + T_n) = at + b + aT_n = at + \tilde{b}$. Тогда равенство $y(T) = Y$ эквивалентно равенству $\tilde{y}(\tilde{T}) = Y$, где $\tilde{T} = T + T_n$. Построим теперь доверительный интервал для величины $\tilde{T} = Y - \tilde{b} / a$ и по нему – доверительный интервал для величины $T = \tilde{T} - N_n$.

Для этого определим $\tilde{t}_k$, $k = 1, \ldots, n$ и найдем методом наименьших квадратов [5, 6] оценки коэффициентов a, $\tilde{b}$ линейной функции регрессии $\tilde{y}(t) = at + \tilde{b}$ по наблюдениям $x_1 = \tilde{y}(\tilde{t}_1) + \varepsilon_1, \ldots, x_n = \tilde{y}(\tilde{t}_n) + \varepsilon_n$. Решением этой задачи является случайный вектор, состоящий из оценок

$$\hat{a}_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k \tilde{t}_k}{\sum_{k=1}^{n} \tilde{t}_k^2}, \quad \hat{b}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k,$$

коэффициентов a, $\tilde{b}$ линейной функции $\tilde{y}(t)$. Этот вектор имеет двумерное нормальное распределение со следующими средними, дисперсиями и коэффициентом ковариации:

$$M\hat{a}_n = a, \; M\hat{b}_n = \tilde{b}, \; D\hat{a}_n = \alpha_n = \frac{\sigma^2}{\sum_{k=1}^{n} \tilde{t}_k^2}, \; D\hat{b}_n = \beta_n = \frac{\sigma^2}{n}, \; \operatorname{cov}(\hat{a}_n, \hat{b}_n) = 0. \quad (1)$$

Замечание 1. Статистики $\hat{a}_n, \hat{b}_n$ – независимые случайные величины. Они являются несмещенными и эффективными (имеют минимальную дисперсию) оценками коэффициентов a, $\tilde{b}$ линейной функции регрессии $\tilde{y}(t)$ [6].

По заданному γ, $0 < \gamma < 1$ с помощью таблицы математической статистики находим число $p(\gamma) > 0$, удовлетворяющее равенству

$$\int_{-p(\gamma)}^{\infty} \frac{\exp(-u^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \, du = 1 - \gamma.$$

Пусть дисперсия σ^2 случайной ошибки наблюдения известна. Тогда при

$$A_n(\gamma) = \hat{a}_n - p(\gamma)\sqrt{\alpha_n}, \quad B_n(\gamma) = \hat{b}_n + p(\gamma)\sqrt{\beta_n} \quad (2)$$

справедливы соотношения

$$P(A_n(\gamma) \le a) = P(\tilde{b} \le B_n(\gamma)) = 1 - \gamma. \quad (3)$$

Обозначим $\tau_n = \dfrac{Y - B_n(\gamma)}{A_n(\gamma)}$. Так как $\tilde{T} = \dfrac{Y - \tilde{b}}{a}$, то в силу формулы (3) и независимости случайных величин $\hat{a}_n$, $\hat{b}_n$ имеем: $P(\tau_n \le \tilde{T}) \ge (1-\gamma)^2$ и, следовательно, справедливо неравенство

$$P(\tau_n - T_n \le T) \ge (1-\gamma)^2. \quad (4)$$

Замечание 2. Приведенный в формуле (4) односторонний доверительный интервал для момента T несколько отличается от обычных доверительных интервалов, поскольку по содержательному смыслу задачи пользователю важно знать, не окажется ли момент достижения критического уровня запасом работоспособности меньше некоторого заданного предельно допустимого момента времени.

Замечание 3. Если дисперсия σ^2 случайной ошибки наблюдения неизвестна, то приходится заменить ее в формулах (1) – (3) остаточной дисперсией

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{k-1}^{n}(x_k - \hat{a}_n t_k - \hat{b}_n)^2,$$

являющейся несмещенной и эффективной оценкой σ^2. При этом случайная величина $(n-2)\hat{\sigma}^2/\sigma^2$ имеет распределение хи-квадрат с (n – 2) степенями свободы [6], а статистики $\hat{a}_n, \hat{b}_n, \hat{\sigma}_n^2$ являются независимыми случайными величинами. Тогда оценка нижней границы $\tau_n - T_n$ доверительного интервала момента T достижения запасом работоспособности критического уровня может быть уточнена.

Замечание 4. Неравенство (4) не противоречит первоначальной содержательной постановке задачи только если $t_n \le \tau_n$. Если справедливо неравенство $\tau_n \le t_n$, то тогда данную техническую систему рекомендуется снимать с эксплуатации.

Замечание 5. Если в процессе эксплуатации запас работоспособности уменьшается нелинейно, – например, возможна ситуация, когда вместо исходной аддитивной линейной регрессионной модели рассматривается мультипликативная регрессионная модель следующего вида: $u(t) = v(t)\exp(\varepsilon_t)$, $v(t) = \exp(at+b)$, тогда логарифмированием можно сделать переход к исходной модели: $\ln u(t) = y(t) + \varepsilon_t$, $y(t) = at + b$.

Способы прогнозирования момента отказа для коротких выборок

Применение метода bootstrap. Сущность метода bootstrap [7] состоит в следующем: по выборке экспериментальных данных, содержащей n измерений, формируются так называемые bootstrap-выборки. Каждая bootstrap-выборка состоит тоже из n измерений, которые выбираются случайным образом (с возвращением) из исходной выборки. Таким образом, каждый опыт bootstrap-выборки входит в исходную выборку, но некоторые опыты исходной выборки могут входить в bootstrap-выборку несколько раз, а некоторые могут отсутствовать в bootstrap-выборке. Построив большое количество (рекомендуется 500-1000) bootstrap-выборок, можно по каждой выборке рассчитать регрессионную модель. Полученные наборы значений параметров регрессионной модели можно использовать для построения эмпирической функции распределения момента достижения запасом работоспособности критического значения. Следует заметить, что при этом не требуется проводить достаточно громоздкие вычисления доверительного интервала.

Привлекательность методики bootstrap связана с возможностью определения с любой желаемой точностью эмпирической функции распределения изучаемой величины, что сулит многочисленные преимущества (существенно расширяется класс соответствующих статистических выводов, появляется возможность освободиться от гипотезы о нормальном распределении ошибок и т.д.). Затраты на использование этого метода связаны только со значительным увеличением сложности расчетов.

Необходимо заметить, что некоторые специалисты с определенным скептицизмом относятся к методу bootstrap. Основные возражения: слабая теоретическая обоснованность метода; некоторая зависимость от датчика псевдослучайных чисел (bootstrap требует использования большого количества случайных чисел); недостаточная выявленность типов данных, для которых bootstrap заметно лучше традиционных методов. Однако в настоящей работе этот метод вызван необходимостью проводить оценки по коротким выборкам, размеры которых определяются технической особенностью поставленной задачи, сложностью определения запаса работоспособности для некоторых технических систем.

Особенности прогнозирования момента отказа для негауссовских распределений. Предположим, что ошибки измерений не подчиняются нормальному распределению. Например, они имеют равномерное распределение, наиболее часто используемое при отсутствии информации о виде распределения. В этом случае оценки $\hat{a}_n$, $\hat{b}_n$ коэффициентов a, $\widetilde{b}$ линейной функции регрессии сохраняют свойства несмещенности и состоятельности, но теряют свойство эффективности. Вместо независимости можно говорить только о некоррелированности оценок $\hat{a}_n$, $\hat{b}_n$. Оценка $\hat{\sigma}_n^2$ дисперсии σ^2 также теряет все свои свойства, кроме несмещенности, и перестает подчиняться распределению хи-квадрат. При построении доверительных интервалов вместо таблиц математической статистики для нормального распределения придется воспользоваться сплайн-аппроксимацией [8] распределения нормированной суммы равномерно распределенных независимых случайных величин. Погрешность такой аппроксимации тем больше, чем меньше число наблюдений, что существенно для коротких выборок.

Применение метода гарантированного результата. Предположим, что ошибки измерений содержатся в некотором интервале, без какого либо указания на их распределение. Тогда для решения задачи прогнозирования по короткой выборке наблюдений можно воспользоваться построением конуса возможных значений момента отказа в рамках минимаксного подхода [9, 10].

Пусть измерения (контроль) запаса работоспособности производятся в моменты времени эксплуатации $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ с точностью (ошибкой) $\varepsilon(t)$, о которой известно только, что она не превышает некоторой заданной величины e: $|\varepsilon(\mathrm{t})| \le e$, тогда истинное значение запаса работоспособности исследуемой системы в момент измерения будет гарантированно находиться в следующих пределах

$$x(t_i) - e < y(t_i) < x(t_i)+e, \quad i = 0,1,2\ldots\ldots \qquad (5)$$

где $x(t_i)$ – результаты измерения.

Система неравенств (5) позволяет определить параметры так называемого конуса возможных реализаций прогнозируемого снижения запаса работоспособности $y(t) = (at + b)$ в процессе эксплуатации. При этом одна из реализаций $y(t)^-$ характеризует пессимистическое развитие процесса, а другая $y(t)^+$ – оптимистическое. Пересечение этих реализаций с заданным уровнем допустимого снижения запаса работоспособности Y позволяет определить момент наступления отказа (рискового события).

Этот подход применительно к решению задачи прогнозирования момента отказа можно проиллюстрировать графически (рис.1).

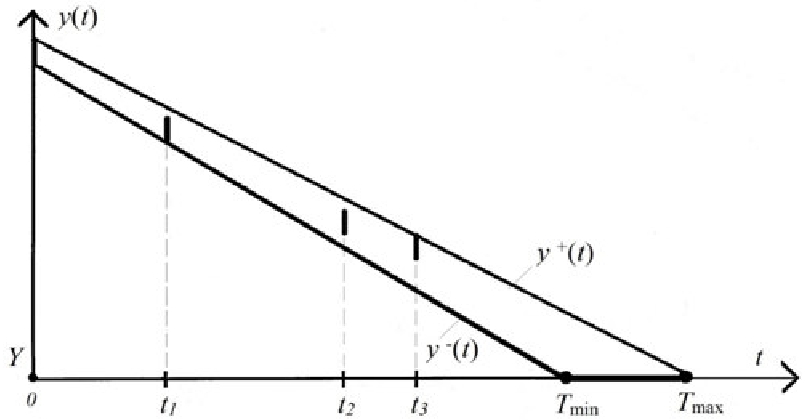

Рис. 1. Гарантированный прогноз момента отказа.

На рис. 1 представлены вертикальные интервалы возможных значений параметра *y в точках измерения* $0 \le t_1 < t_2 < \ldots$. По самым крайним точкам этих интервалов строится так называемый конус возможных эксплуатационных изменений запаса работоспособности $y(t)^-$, $y(t)^+$, содержащий полностью все представленные интервалы. Этот конус пересекает уровень допустимого снижения запаса работоспособности исследуемой системы Y (на рисунке мы совместили его с осью времени t) в точках T_{min} и T_{max}, которые являются границами интервала возможных моментов наступления рискового события (отказа). Данное геометрическое построение несложно выразить аналитически.

Заключение

Рассмотрена одна из возможных постановок задачи анализа и прогнозирования рисков, возникающей при использовании функционально-параметрического похода теории техногенных рисков. В качестве параметра технического состояния исследуемой системы использовался запас работоспособности (это может быть, например, запас прочности, устойчивости, остаточный ресурс и т.д.), который со временем эксплуатации линейно убывает. Предполагалось, что в процессе эксплуатации осуществляется мониторинг (контроль) запаса работоспособности или остаточного ресурса. Показано, что при достаточно частых измерениях запаса работоспособности прогнозирование момента наступления рискового события (отказа) можно успешно осуществлять на основе предложенного алгоритма линейного регрессионного анализа. Значительно сложнее получить удовлетворительный результат в случае небольшого числа наблюдений (короткой выборки). Обсуждаются некоторые подходы, которые могут быть использованы в условиях дефицита исходной информации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Острейковский В.А.* Теория техногенного риска: математические методы и модели. – Сургут: ИЦ СурГУ, 2013.
2. *Абрамов О.В.* Об оценке вероятности наступления рискового события: функционально-параметрический подход // Надежность и качество сложных систем. – 2016. – № 1. – С. 24-31.
3. *Абрамов О.В.* Функционально-параметрическое направление теории рисков: возможности и перспективы // Вестник ДВО РАН. – 2016. – № 4. – С. 96-101.
4. *Абрамов О.В.* Анализ и прогнозирование техногенных рисков // Информатика и системы управления. – 2012. – № 3. – С. 97-105.
5. *Рыков В.В.*, *Иткин В.Ю.* Математическая статистика и планирование эксперимента. – М.: МАКС Пресс, 2010.
6. *Боровков А.А.* Математическая статистика. Дополнительные главы. – М.: Наука, 1984.
7. *Коновалов Ю.В.* Статистическое моделирование с использованием регрессионного анализа. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013.
8. *Завьялов Ю.С.*, *Леус В.А.*, *Скороспелов В.А.* Сплайны в инженерной геометрии. – М.: Машиностроение, 1985.
9. *Ащепков Л.Т.* Модели и методы повышения живучести управляемых систем. – Владивосток: Дальнаука, 2006.
10. *Абрамов ОВ.*, *Розенбаум А.Н.*, *Климченко В.В.* Прогнозирование состояния и планирование эксплуатации систем ответственного назначения // Вестник ДВО РАН. – 1996. – № 4. – С.65-76.

E-mail:
Абрамов Олег Васильевич – abramov@iacp.dvo.ru;
Цициашвили Гурам Шалвович – guram@iam.dvo.ru.