

УДК 519.642.3

© 2018 г. А.А. Каширин, канд. физ.-мат. наук,

С.И. Смагин, чл.-корр. РАН

(Вычислительный центр ДВО РАН, Хабаровск)

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА СПЕКТРЕ ДЛЯ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН*

Работа посвящена численному решению интегральных уравнений трехмерной скалярной задачи дифракции на спектре интегральных операторов, где нарушается условие эквивалентности дифференциальной и интегральной постановки задачи. Предложен метод интерполяции решения, позволяющий находить приближенные решения задач дифракции в этих случаях.

Ключевые слова: интегральное уравнение, задача дифракции, спектр, метод интерполяции решения, многопроцессорная система.

DOI: 10.22250/isu.2018.58.141-149

Введение

Рассматривается задача дифракции акустических волн на трехмерном однородном включении в обобщенной постановке. В работах [1, 2] получены и исследованы два условно-эквивалентных ей, слабо сингулярных граничных интегральных уравнения Фредгольма первого рода с одной неизвестной функцией. Численное решение этих уравнений проведено в [2, 3]. Вычислительные эксперименты показали, что предлагаемый подход позволяет находить приближенные решения задачи дифракции с высокой точностью в широком диапазоне волновых чисел.

Упомянутые граничные интегральные уравнения Фредгольма первого рода обладают следующим свойством: у входящих в их состав интегральных операторов имеется спектр – счетное множество положительных волновых чисел, на котором нарушаются условия эквивалентности этих уравнений задаче дифракции. В этом случае интегральные уравнения либо не имеют решений, либо разрешимы не единственным образом, в отличие от исходной задачи, которая всегда корректно разрешима. Для областей общей формы спектр операторов заранее неиз-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 17-01-00682) и Программы фундаментальных исследований ДВО РАН (проект 18-5-100).

вестен, а его поиск является весьма трудоемкой задачей. Поэтому возникает необходимость в использовании таких вариантов метода интегральных уравнений, которые позволяют находить решения задачи дифракции при всех волновых числах, включая точки спектра интегральных операторов.

Один из способов решения указанной проблемы заключается в модификации используемых интегральных представлений [4]. Получаемые при этом интегральные уравнения полностью эквивалентны исходной задаче, но имеют более сложную структуру и менее удобны для численного решения. Другой способ основан на аппроксимации решений интегральных уравнений (если они существуют) линейными комбинациями решений вспомогательных, корректно разрешимых уравнений с "близкими" волновыми числами [5]. Этот способ подразумевает предварительное исследование свойств решений интегральных уравнений на спектре интегральных операторов. Такое исследование проведено в [6].

В настоящей работе рассмотрено применение метода интерполяции решения для численного решения трехмерных задач дифракции акустических волн в интегральных постановках на спектре интегральных операторов и приведены результаты численных экспериментов для задач на спектре с известными точными решениями.

Постановка задачи

Рассмотрим трехмерное евклидово пространство R^3 с ортогональной системой координат $ox_1x_2x_3$, заполненное однородной изотропной средой с плотностью ρ_e , скоростью распространения колебаний c_e и коэффициентом поглощения γ_e , в котором имеется ограниченное произвольной замкнутой поверхностью $\Gamma \in C^{r+\beta}$, $r + \beta > 1$ однородное изотропное включение с плотностью ρ_i , скоростью c_i и коэффициентом поглощения γ_i . Области R^3 , занятые включением и вмещающей средой, обозначим через Ω_i и Ω_e , $\Omega_e = R^3 \setminus \overline{\Omega_i}$.

Пусть в области Ω_e имеются гармонические источники звука, возбуждающие во вмещающей среде исходное волновое поле давлений u_0 . Звуковые волны распространяются в пространстве и, достигая включения, рассеиваются на нем. В результате в области Ω_e возникают отраженные волны, а в области Ω_i появляются проходящие волны. Поэтому комплексную амплитуду полного поля давлений u можно представить в виде:

$$u = \begin{cases} u_i, & x \in \Omega_i, \\ u_e + u_0, & x \in \Omega_e, \end{cases}$$

где u_i , u_e – комплексные амплитуды поля давлений проходящего и отраженного волновых полей.

Сформулируем исходную задачу.

Задача 1 (обобщенная постановка задачи дифракции). Найти функции $u_{i(e)} \in H^1(\Omega_{i(e)}, \Delta)$, удовлетворяющие интегральным тождествам

$$\int_{\Omega_{i(e)}} \nabla u_{i(e)} \nabla v_{i(e)}^* dx - k_{i(e)}^2 \int_{\Omega_{i(e)}} u_{i(e)} v_{i(e)}^* dx = 0 \quad \forall v_{i(e)} \in H_0^1(\Omega_{i(e)}), \quad (1)$$

условиям сопряжения на границе раздела сред из Ω_i и Ω_e

$$\begin{aligned} \langle u_i^- - u_e^+, \mu \rangle_{\Gamma} &= \langle f_0, \mu \rangle_{\Gamma} \quad \forall \mu \in H^{-1/2}(\Gamma), \\ \langle \eta, p_i N^- u_i - p_e N^+ u_e \rangle_{\Gamma} &= \langle \eta, p_e f_1 \rangle_{\Gamma} \quad \forall \eta \in H^{1/2}(\Gamma) \end{aligned} \quad (2)$$

и условию излучения на бесконечности

$$\partial u_e / \partial |x| - ik_e u_e = o(|x|^{-1}), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (3)$$

если на границе включения Γ заданы функции $f_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$ и $f_1 \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Здесь v^* – комплексно-сопряженная к v функция; $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$ – отношение двойственности на $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$, обобщающее скалярное произведение в $H^0(\Gamma)$; $u^{\pm} \equiv \gamma^{\pm} u$, $\gamma^-: H^1(\Omega_i) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$, $\gamma^+: H^1(\Omega_e) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ – операторы следов; $N^-: H^1(\Omega_i, \Delta) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$, $N^+: H^1(\Omega_e, \Delta) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ – операторы нормальных производных [7]; $f_0 = u_0^+$, $f_1 = N^+ u_0$; ω – круговая частота колебаний; $k_{i(e)}^2 = \omega(\omega + i\gamma_{i(e)})c_{i(e)}^{-2}$, $\text{Im}(k_{i(e)}) \geq 0$, $p_{i(e)} = c_{i(e)}^2 k_{i(e)}^{-2} \rho_{i(e)}^{-1}$.

Замечание 1. Если $\text{Im}(k_e) = 0$, то $u_e \in H_{\text{loc}}^1(\Omega_e, \Delta)$.

Известно, что при сделанных предположениях задача 1 имеет не более одного решения [1, 2].

Введем следующие обозначения

$$(A_{i(e)} q)(x) \equiv \langle G_{i(e)}(x, \cdot), q \rangle_{\Gamma}, \quad (B_{i(e)} q)(x) \equiv \langle N_x G_{i(e)}(x, \cdot), q \rangle_{\Gamma}, \quad (4)$$

$$(B_{i(e)}^* q)(x) \equiv \langle N_{(\cdot)} G_{i(e)}(x, \cdot), q \rangle_{\Gamma},$$

$$G_{i(e)}(x, y) = \exp(ik_{i(e)}|x - y|) / (4\pi|x - y|).$$

Решение задачи 1 будем искать в виде потенциалов

$$u_e(x) = (A_e q)(x), \quad x \in \Omega_e, \quad (5)$$

$$u_i(x) = (p_{ei} A_i (f_1 + N^+ u_e) - B_i^* (f_0 + u_e^+))(x), \quad x \in \Omega_i,$$

где $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$ – неизвестная плотность; $f_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$, $f_1 \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $p_{ei} = p_e/p_i$.

В работах [1, 2] показано, что задача 1 условно эквивалентна слабо сингулярному интегральному уравнению Фредгольма

$$\langle Cq, \mu \rangle_{\Gamma} = \langle f_2, \mu \rangle_{\Gamma} \quad \forall \mu \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad (6)$$

$$C = (0.5 + B_i^*) A_e + p_{ei} A_i (0.5 - B_e), \quad f_2 = -(0.5 + B_i^*) f_0 + p_{ei} A_i f_1.$$

Исходная задача допускает еще одну условно эквивалентную формулировку в виде интегрального уравнения Фредгольма первого рода со слабой особен-

ностью в ядре. Будем искать ее решение в виде

$$u_i(x) = (A_i q)(x), \quad x \in \Omega_i, \quad (7)$$

$$u_e(x) = \left(A_e (f_1 - p_{ie} N^- u_i) - B_e^* (f_0 - u_i^-) \right)(x), \quad x \in \Omega_e,$$

где $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$ – неизвестная плотность; $f_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$, $f_1 \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $p_{ie} = p_i / p_e$.

В этом случае задача 1 сводится к интегральному уравнению

$$\langle Dq, \mu \rangle_\Gamma = \langle f_0, \mu \rangle_\Gamma \quad \forall \mu \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad (8)$$

$$D = (0.5 - B_e^*) A_i + p_{ie} A_e (0.5 + B_i).$$

Теорема 1 [2]. Пусть $f_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$, $f_1 \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $\gamma_e > 0$ или ω не является собственной частотой задачи

$$\Delta u + k_e^2 u = 0, \quad x \in \Omega_i, \quad u^- = 0. \quad (9)$$

Тогда уравнения (6) и (8) корректно разрешимы в классе плотностей $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$ и формулы (5) и (7) дают решение задачи 1.

Целью данной работы является рассмотрение наиболее трудных с вычислительной точки зрения случаев, когда решение задачи дифракции ищется на собственных частотах задачи (9).

Теорема 2 [6]. Пусть $f_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$, $f_1 \in H^{-1/2}(\Gamma)$ и ω – собственная частота задачи (9). Решение уравнения (6) существует только в том случае, когда $\langle f_2, q' \rangle_\Gamma = 0$, где q' – общее решение однородного уравнения (8). При выполнении этого условия решение уравнения (6) имеет вид $q = q_e + q''$, где q_e – его частное решение, q'' – общее решение однородного уравнения (6). Решение q , подставленное в формулы (5), дает решение задачи 1.

Решение уравнения (8) существует и имеет вид $q = q_i + q'$, где q_i – его частное решение. Уравнение (8) неэквивалентно исходной задаче, однако q_i , подставленное в формулы (7), дает решение задачи 1.

О численном решении интегральных уравнений на спектре

Для численного решения интегральных уравнений используется не требующий триангуляции поверхности и согласованный с шагом сетки метод осреднения интегральных операторов со слабыми особенностями в ядрах, позволяющий строить дискретные аналоги исходных задач по весьма простым аналитическим формулам.

Кратко опишем общую схему его реализации. Построим покрытие поверхности Γ системой $\{\Gamma_m\}_{m=1}^M$ окрестностей узловых точек $x'_m \in \Gamma$, лежащих внутри сфер радиусов h_m с центрами в x'_m , и обозначим через $\{\varphi_m\}$ подчиненное ему разбиение единицы. В качестве φ_m будем использовать функции

$$\varphi_m(x) = \varphi'_m \left(\sum_{k=1}^M \varphi'_k(x) \right)^{-1}, \quad \varphi'_m(x) = \begin{cases} (1 - r_m^2/h_m^2)^3, & r_m < h_m, \\ 0, & r_m \geq h_m, \end{cases}$$

где $x \in \Gamma$, $r_m = |x - x'_m|$; $\varphi_m \in C^1(\Gamma)$ при $\Gamma \in C^{r+\beta}$, $r + \beta > 1$.

Приближенные решения уравнений (6) и (8) будем искать на сетке $\{x_m\}$

$$x_m = \frac{1}{\bar{\varphi}_m} \int_{\Gamma} x \varphi_m d\Gamma, \quad \bar{\varphi}_m = \int_{\Gamma} \varphi_m d\Gamma,$$

узлами которой являются центры тяжести функций φ_m . Будем предполагать, что для всех $m = 1, 2, \dots, M$ выполняются неравенства

$$0 < h' \leq |x_m - x_n|, \quad m \neq n, \quad n = 1, 2, \dots, M, \quad h' \leq h_m \leq h, \quad h/h' \leq q_0 < \infty,$$

где h, h' – положительные числа, зависящие от M ; q_0 не зависит от M .

Вместо заданной на Γ функции q будем искать обобщенную функцию $q\delta_{\Gamma}$, действующую по правилу

$$(q\delta_{\Gamma}, \eta)_{R^3} = \langle q, \eta \rangle_{\Gamma} \quad \forall \eta \in H^1(R^3).$$

Приближать эту функцию будем выражением

$$q(x)\delta_{\Gamma}(x) \approx \sum_{n=1}^M q_n \bar{\varphi}_n \psi_n(x),$$

где q_n – неизвестные коэффициенты,

$$\psi_n(x) = (\pi\sigma_n^2)^{-3/2} \exp(-(x - x_n)^2 / \sigma_n^2), \quad \sigma_n^2 = 0.5\bar{\varphi}_n.$$

В работе [5] показано, что для любых функций $\eta \in H^1(R^3)$ и $q \in H^1(\Gamma)$ справедливо равенство

$$\langle q, \eta \rangle_{\Gamma} = \sum_{n=1}^M q_n \bar{\varphi}_n (\psi_n, \eta)_{R^3} + O(h^2).$$

Приближение плотности потенциала простого слоя объемной плотностью позволяет получать простые формулы для аппроксимации интегральных операторов (4). Теоретическое обоснование изложенного подхода имеется в работе [5].

Выберем в качестве μ в обеих частях тождеств (6) и (8) функции φ_m , $m = 1, 2, \dots, M$, и проинтегрируем по Γ . Тогда, учитывая [2], получаем

$$\int_{\Gamma} (A_{i(e)} q) \varphi_m d\Gamma \approx \bar{\varphi}_m \sum_{n=1}^M A_{i(e)}^{mn} q_n, \quad m = 1, 2, \dots, M,$$

$$A_{i(e)}^{mn} \equiv A_{mn}(k_{i(e)}), \quad A_{mn} = 0.5\beta_{mn} \exp(-\gamma_{mn}^2) (w(z_{mn}^+) - w(z_{mn}^-)) / r_{mn},$$

$$A_{mn} = \beta_{mn} \left(2(\pi\sigma_{mn}^2)^{-1/2} + ikw(\mu_{mn}) + 2\pi^{1/2} (1 - \mu_{mn}^2/3) \sigma_{mn} / \bar{\varphi}_m \right),$$

$$\beta_{mn} = \bar{\varphi}_n \left(4\pi (1 - \mu_{mn}^2 + 0.5\mu_{mn}^4) \right)^{-1}, \quad \sigma_{mn}^2 = \sigma_m^2 + \sigma_n^2, \quad \mu_{mn} = 0.5k\sigma_{mn},$$

$$r_{mn} = |x_m - x_n|, \quad \sigma_{mn} = (\sigma_m^2 + \sigma_n^2)^{1/2}, \quad \gamma_{mn} = r_{mn} / \sigma_{mn},$$

$$z_{mn}^{\pm} = \pm \gamma_{mn} + i \mu_{mn}, \quad \gamma_{mn} = r_{mn} / \sigma_{mn}, \quad i^2 = -1, \quad w(z) = -\frac{2i}{\pi^{1/2}} \exp(-z^2) \int_z^{\infty} \exp(t^2) dt.$$

$$\int_{\Gamma} (aq + B_{i(e)} q) \varphi_m d\Gamma \approx \bar{\varphi}_m \sum_{n=1}^M B_{i(e)}^{mn} q_n, \quad m = 1, 2, \dots, M,$$

$$B_{i(e)}^{mn} = (4\pi r_{mn}^3)^{-1} n_{mn}^* \exp(ik_{i(e)} r_{mn}) (ik_{i(e)} r_{mn} - 1) \bar{\varphi}_n, \quad n_{mn}^* = \sum_{l=1}^3 n_{lm} (x_{lm} - x_{ln}),$$

$$B_{i(e)}^{mn} = -Gs(x_m) \quad \text{при } a = 0.5, \quad B_{i(e)}^{mn} = -1 - Gs(x_m) \quad \text{при } a = -0.5,$$

$$Gs(x_m) = \sum_{n \neq m}^M \frac{n_{mn}^* \bar{\varphi}_n}{4\pi r_{mn}^3} \approx \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} N_y \frac{1}{|x_m - y|} d\Gamma_y = -\frac{1}{2}.$$

Интегральные операторы в левых частях уравнений (6) и (8) являются композицией приведенных выше интегральных операторов, поэтому аппроксимируем их по формулам:

$$\int_{\Gamma} (Cq) \varphi_m d\Gamma \approx \sum_{n=1}^M (A_e^{mn} B_i^{mn} - p_{ei} A_i^{mn} B_e^{mn}) q_n, \quad m = 1, 2, \dots, M,$$

$$\int_{\Gamma} (Dq) \varphi_m d\Gamma \approx \sum_{n=1}^M (p_{ie} A_e^{mn} B_i^{mn} - A_i^{mn} B_e^{mn}) q_n, \quad m = 1, 2, \dots, M,$$

а правые части уравнений (6) и (8) – по формулам

$$\int_{\Gamma} f_2 \varphi_m d\Gamma \approx \bar{\varphi}_m \left(Gs(x_m) f_0(x_m) + \sum_{n=1}^M \bar{\varphi}_n [p_{ei} A_i^{mn} f_1(x_n) - f_0(x_n) B_i^{nm}] \right),$$

$$\int_{\Gamma} f_0 \varphi_m d\Gamma \approx \bar{\varphi}_m f_0(x_m), \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

Решая соответствующие СЛАУ, найдем приближенные значения плотностей в точках дискретизации для каждого из интегральных уравнений. После этого искомые решения задач дифракции могут быть одинаково просто и точно вычислены как в дальней, так и в ближней зонах.

Более подробное описание метода имеется, например, в работах [2, 3, 5].

Для численного решения интегральных уравнений на спектре воспользуемся следующей схемой. Обозначим через $k_e > 0$ некоторое собственное волновое число задачи (9), а через $q(k_e)$ – зависящее от него частное решение неоднородного уравнения (6) или (8). Выберем некоторое число $\delta > 0$. Тогда для искомого частного решения интегрального уравнения имеет место интерполяционная формула

$$q(k_e) = 4q(k_e + i\delta) - q(k_e - \delta + i\delta) - q(k_e + \delta + i\delta) - q(k_e + 2i\delta) + O(\delta^4), \quad (10)$$

где все плотности в правой части являются решениями корректно разрешимых интегральных уравнений. Подстановка найденной плотности в формулы (5) или (7) дает приближенное решение исходной задачи.

Формула (10) подразумевает, что искомое частное решение интегрального уравнения существует. В тех же случаях, когда оно не существует, приближенное решение задачи дифракции может быть найдено по аналогичной формуле

$$u_{i(e)}(k_e) = 4u_{i(e)}(k_e + i\delta) - u_{i(e)}(k_e - \delta + i\delta) - u_{i(e)}(k_e + \delta + i\delta) - u_{i(e)}(k_e + 2i\delta) + O(\delta^4). \quad (11)$$

Однако этот способ решения является более трудоемким.

Численные эксперименты

Программа для численного решения краевых задач написана на языке Fortran 90, она представляет собой консольное приложение, предназначенное для работы на многопроцессорных вычислительных системах. В качестве компилятора выступает Intel Fortran Compiler, также используются библиотека Intel Math Kernel Library (Intel MKL) и реализация стандарта OpenMP для данного компилятора. Численные эксперименты проведены на вычислительном кластере ЦКП "Центр данных ДВО РАН" [8]. Правильность и точность предлагаемого подхода проверялись для задач дифракции, имеющих известные точные решения.

Пример 1. Рассматривается задача дифракции плоской акустической волны на единичном шаре с центром в начале координат и тремя различными наборами параметров вмещающей среды и включения. Комплексная амплитуда исходного волнового поля давлений имеет вид $u_0(x) = \exp(ik_e x_3)$, параметры сред: I) $k_i = 12.5$, $\rho_i = 4$, $k_e = 7.725251836937$, $\rho_e = 3$; II) $k_i = 7$, $\rho_i = 2$, $k_e = 16.9236212852138$, $\rho_e = 5$; III) $k_i = 21$, $\rho_i = 7$, $k_e = 13.6980231532492$, $\rho_e = 4.5$.

В качестве k_e здесь выбраны собственные числа задачи (9).

Исследование уравнения (6) показало, что в этом случае оно не имеет решения [6]. Поэтому формула (10) не даст результата и необходимо использовать формулу (11). Существование частного решения уравнения (8) следует из теоремы 2. Оно может быть приближенно найдено при помощи формулы (10).

Основной целью численных экспериментов являлась демонстрация возможностей метода интерполяции решения. В связи с этим задачи из примера 1 решались дважды – с интерполяцией решения (формула (10), $\delta = 0.01$) и без нее. Количество точек дискретизации M варьировалось от 500 до 128000.

На рис. 1 и 2 приведены погрешности решений задач дифракции, полученных путем решения уравнения (6). Погрешности вычислены в норме пространств сеточных функций $H_h^0(\Omega_{i(e)})$ [2]. Здесь и далее сплошной линией обозначены погрешности функций u_i , пунктиром – погрешности функций u_e , результаты расчетов, относящиеся к первому, второму и третьему набору параметров, отмечены на графиках треугольниками, кругами и квадратами соответственно. Видно, что уравнение (6) без интерполяции решения не может быть использовано для нахождения приближенных решений задач дифракции, так как погрешности при уве-

личении порядка СЛАУ не уменьшаются. При этом интерполяция по формуле (11) позволяет находить эти решения с погрешностями, которые при достаточно больших M имеют порядок не хуже $h^2 \sim M^{-1}$.

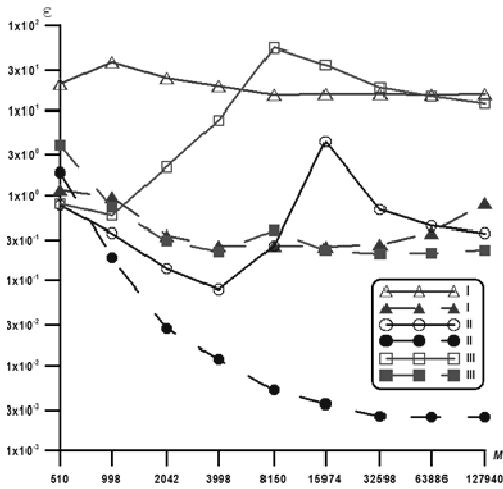


Рис. 1. Погрешности решений задач дифракции из примера 1, найденных с использованием уравнения (6) без интерполяции решений.

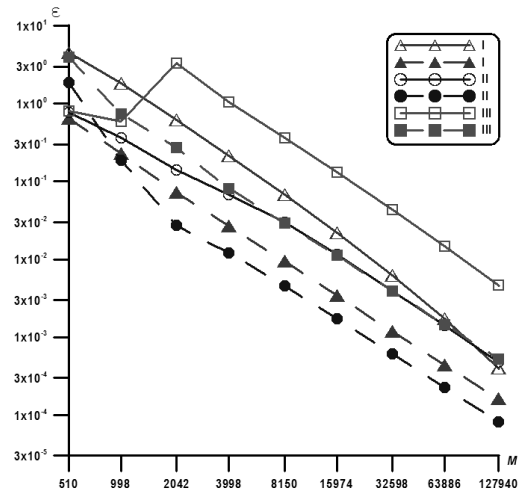


Рис. 2. Погрешности решений задач дифракции из примера 1, найденных с использованием уравнения (6) с интерполяцией решений.

Для решений задач дифракции, полученных с использованием уравнения (8) с интерполяцией решения по формуле (10), погрешности имеют тот же порядок (рис. 4). Расчеты без интерполяции решения, представленные на рис. 3, в этом случае дают неудовлетворительные результаты, что согласуется с теоремой 2. Сравнение представленных результатов численных экспериментов показывает эффективность метода интерполяции решения.

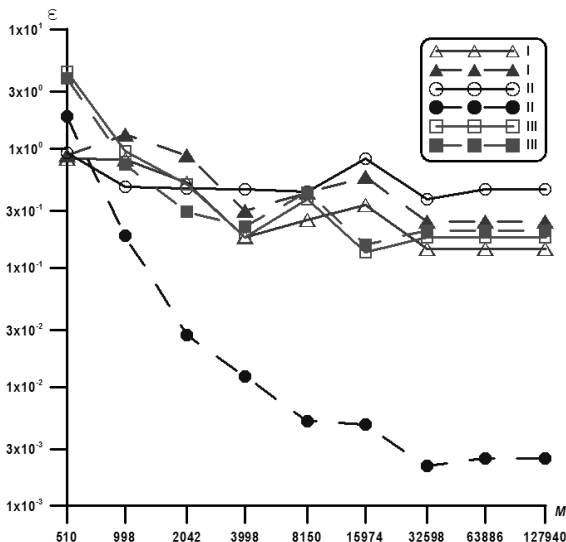


Рис. 3. Погрешности решений задач дифракции из примера 1, найденных с использованием уравнения (8) без интерполяции решений.

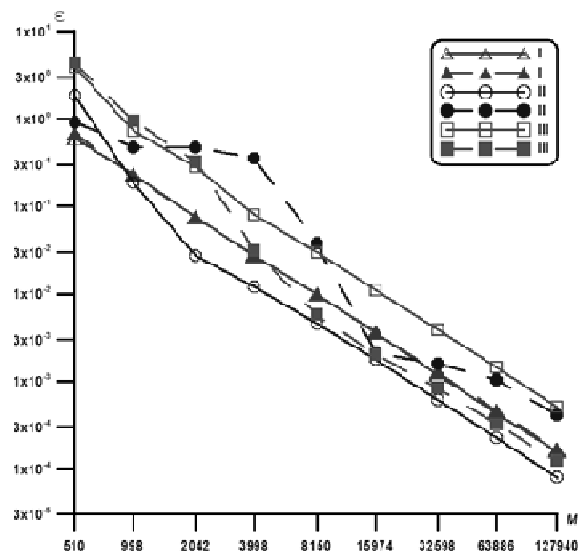


Рис. 4. Погрешности решений задач дифракции из примера 1, найденных с использованием уравнения (8) с интерполяцией решений.

Заключение

Работа посвящена численному решению интегральных уравнений трехмерной скалярной задачи дифракции акустических колебаний на спектре интегральных операторов. Описан метод интерполяции решения и приведены результаты вычислительных экспериментов по численному решению интегральных уравнений на спектре, соответствующих исходной задаче дифракции, с использованием этого подхода. Показано, что предлагаемый метод позволяет находить приближенные решения рассматриваемых задач с высокой точностью.

В дальнейшем предполагается понизить вычислительную сложность предлагаемого способа решения задач дифракции за счет использования быстрых численных методов, как это было сделано для краевых задач в работе [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каширин А.А., Смагин С.И.* Обобщенные решения интегральных уравнений скалярной задачи дифракции // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42, № 1. – С. 79-90.
2. *Каширин А.А.* Исследование и численное решение интегральных уравнений трехмерных стационарных задач дифракции акустических волн: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Хабаровск. 2006.
3. *Каширин А.А., Смагин С.И.* Численное решение интегральных уравнений трехмерных скалярных задач дифракции // Вычислительные технологии. – 2018. – Т. 23, № 2. – С. 20-36.
4. *Kleinman R.E., Martin P.A.* On single integral equations for the transmission problem of acoustics // SIAM J. Appl. Math. – 1988. – V. 48, № 2. – P. 307-325.
5. *Каширин А.А., Смагин С.И.* О численном решении задач Дирихле для уравнения Гельмгольца методом потенциалов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2012. – Т. 52, № 8. – С. 1492-1505.
6. *Каширин А.А.* Исследование интегральных уравнений скалярной задачи дифракции на спектре. Препринт № 185. – Хабаровск: ВЦ ДВО РАН, 2012.
7. *McLean W.* Strongly elliptic systems and boundary integral equations. – Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
8. Центр коллективного пользования "Центр данных ДВО РАН" [Электронный ресурс]: сайт. – Хабаровск: ВЦ ДВО РАН. URL: <http://lits.ccfefbras.ru> (дата обращения: 09.10.2018).
9. *Каширин А.А., Смагин С.И., Талтыкина М.Ю.* Применение мозаично-скелетонного метода при численном решении трехмерных задач Дирихле для уравнения Гельмгольца в интегральной форме // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2016. – Т. 56, № 4. – С. 625-638.

E-mail:

Каширин Алексей Алексеевич – elomer@mail.ru:

Смагин Сергей Иванович – smagin@as.khb.ru.